uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

CÁLCULO DIFERENCIAL APLICADO
TEMA 3: Sistemas de ecuaciones diferenciales.
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Autores:
Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin y Rocio Vega

---

Cuestión 1 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\vec{X}'(t) = A\,\vec{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Cuestión 2 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\vec{X}'(t) = A\,\vec{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{X}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Cuestión 3 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\vec{X}'(t) = A\,\vec{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Cuestión 4 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\vec{X}'(t) = A\,\vec{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Cuestión 5 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\vec{X}'(t) = A\,\vec{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cuestión 6 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\vec{X}'(t) = A\,\vec{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Cuestión 7 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\vec{X}'(t) = A\,\vec{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Cuestión 8 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\vec{X}'(t) = A\,\vec{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Cuestión 9 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\vec{X}'(t) = A\,\vec{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$$

Cuestión 10 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\vec{X}'(t) = A\,\vec{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Cuestión 11 Se considera el siguiente Problema de Valor Inicial (PVI):

$$y'' + 4y' + 3y = 0\,; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 2\,.$$

Se pide:

i) Aplicar el cambio de variables $X_1 = y\,; X_2 = y'$, con $\vec{X} = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ para transformar el PVI anterior en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \vec{X}(t)\,; \quad \text{bajo la condición inicial} \quad \vec{X}(0) = (1,2)^{\mathrm{T}}.$$

ii) Resolver el sistema del apartado anterior.

Cuestión 12 Dado el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = 2x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 6x_1 - 4x_2 \end{array} \right. ,$$

Se pide:

1. Resolver el sistema bajo la condición inicial $\vec{X}(0) = (x_1(0), x_2(0)) = (1, 1)$.
2. Comprobar la solución obtenida en el apartado 1.

Cuestión 13 Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ que satisface la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, se pide:

(a) Hallar la solución $\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$.

(b) Resolver el siguiente problema de valor inicial.

$$y'' - 6y' + 9y = 0; \qquad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 6,$$

(c) Aplicando el cambio de variables, $X_2(t) = y(t)$, demostrar que el sistema de ecuaciones es equivalente al problema de valor inicial del apartado (b). Comparar las soluciones obtenidas en los apartados (a) y (b)

Cuestión 14 Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, se pide:

(a) Hallar la solución general del sistema $\overrightarrow{X}(t)$.

(b) Encontrar <u>una</u> solución del sistema que esté acotada cuando $t \longrightarrow +\infty$.

Cuestión 15 Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$,
Se pide:

i) Hallar la solución general del sistema $\overrightarrow{X}(t)$

ii) Estudiar el comportamiento de la solución general cuando la variable $t \to -\infty$

Cuestión 16 Dado el sistema de ecuaciones $\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$
a) Encontrar la solución que cumple la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = (2 \;\; 0)^T$.
b) Comprobar la solución obtenida.

Cuestión 17 Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,
Se pide:

i) Hallar la solución general del sistema $\overrightarrow{X}(t)$

ii) Estudiar el comportamiento de la solución general cuando la variable $t \to +\infty$

Cuestión 18 Sea el sistema de ecuaciones $\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ \alpha & -3 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se pide:

a) Hallar la solución general cuando $\alpha = 2$.

b) Resolver el sistema bajo la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = (3,\ 2)^T$ cuando $\alpha = 0$.

Cuestión 19 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 5\,x_1(t) - 6\,x_2(t) \\ x_2'(t) = 3\,x_1(t) - \,x_2(t) \end{cases}$$

sabiendo que $x_1(0) = -1\,;\, x_2(0) = 2\,.$

Cuestión 20 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1'(t) = 3\,x_1(t) + 2\,x_2(t) \\ x_2'(t) = -2\,x_1(t) + 3\,x_2(t) \end{array} \right.$$

sabiendo que $x_1(0) = 2\,;\; x_2(0) = -1\,.$
