CÁLCULO DIFERENCIAL APLICADO
TEMA 3: Sistemas de ecuaciones diferenciales.
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Autores:
Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin y Rocio Vega

---

Cuestión 1 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\vec{X}'(t) = A\,\vec{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:
Autovalores de la matriz A: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$.
Vectores propios: $V_{\lambda_1} = (1,1,1)$, $V_{\lambda_2} = (-1,0,1)$, $V_{\lambda_3} = (1,-2,1)$.
Solución:

$$\begin{aligned}
X_1(t) &= c_1\left[\frac{1}{6}e^{t} + \frac{1}{3}e^{4t} + \frac{1}{2}e^{-t}\right] + c_2\left[-\frac{1}{3}e^{t} + \frac{1}{3}e^{4t}\right] + c_3\left[\frac{1}{6}e^{t} + \frac{1}{3}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{-t}\right]; \\
X_2(t) &= c_1\left[-\frac{1}{3}e^{t} + \frac{1}{3}e^{4t}\right] + c_2\left[\frac{2}{3}e^{t} + \frac{1}{3}e^{4t}\right] + c_3\left[-\frac{1}{3}e^{t} + \frac{1}{3}e^{4t}\right]; \\
X_3(t) &= c_1\left[\frac{1}{6}e^{t} + \frac{1}{3}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{-t}\right] + c_2\left[-\frac{1}{3}e^{t} + \frac{1}{3}e^{4t}\right] + c_3\left[\frac{1}{6}e^{t} + \frac{1}{3}e^{4t} + \frac{1}{2}e^{-t}\right];
\end{aligned}$$

con $\quad c_1\,, c_2\,, c_3 \in \mathbb{R}$

Cuestión 2 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\vec{X}'(t) = A\,\vec{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{X}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:
Autovalores de la matriz A: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$.

Vectores propios: $V_{\lambda_1} = (1,1)$, $V_{\lambda_2} = (1,3)$.
Solución:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \frac{7}{2}e^{4t} - \frac{3}{2}e^{2t}\,; \\ X_2(t) &= \frac{7}{2}e^{4t} - \frac{3}{2}e^{2t}\,; \end{aligned}$$

Cuestión 3 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\vec{X}'(t) = A\,\vec{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:
Autovalores de la matriz A: $\lambda_1 = -1+i$, $\lambda_2 = -1-i$.
Vectores propios: $V_{\lambda_1} = (2+i,5)$, $V_{\lambda_2} = (2-i,5)$.
Solución:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= 5e^{-t}\sin(t) + 2e^{-t}\cos(t)\,; \\ X_2(t) &= 12e^{-t}\sin(t) - e^{-t}\cos(t)\,; \end{aligned}$$

Cuestión 4 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\vec{X}'(t) = A\,\vec{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:
Autovalores de la matriz A: $\lambda_1 = 1+i2$, $\lambda_2 = 1-i2$.
Vectores propios: $V_{\lambda_1} = (1+i,2)$, $V_{\lambda_2} = (1-i,2)$.
Solución:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= c_1e^t(\sin(2t)+\cos(2t)) - c_2e^t\sin(2t)\,; \\ X_2(t) &= 2c_1e^t\sin(2t) + c_2e^t(\cos(2t)-\sin(2t))\,; \\ \text{con}\quad c_1\,,c_2 \in \mathbb{R} & \end{aligned}$$

Cuestión 5 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\vec{X}'(t) = A\,\vec{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:
Autovalores de la matriz A: $\lambda_1 = -1+i$, $\lambda_2 = -1-i$.
Vectores propios: $V_{\lambda_1} = (2+i,1)$, $V_{\lambda_2} = (2-i,1)$.
Solución:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^{-t}(\cos(t) - 3\sin(t))\,; \\ X_2(t) &= e^{-t}(\cos(t) - \sin(t))\,; \end{aligned}$$

Cuestión 6 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\vec{X}'(t) = A\,\vec{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:
Autovalores de la matriz A: $\lambda_1 = -2 + i$, $\lambda_2 = -2 - i$.
Vectores propios: $V_{\lambda_1} = (1 - i, 1)$, $V_{\lambda_2} = (1 + i, 1)$.
Solución:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^{-2t}(\cos(t) - 5\sin(t))\,; \\ X_2(t) &= -e^{-t}(3\sin(t) + 2\cos(2t))\,; \end{aligned}$$

Cuestión 7 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\vec{X}'(t) = A\,\vec{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:
Autovalores de la matriz A: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.
Vector propio: $V = (-1, 1)$.
Solución:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= c_1 e^{2t}(1 - t) - c_2 t e^{2t}\,; \\ X_2(t) &= c_1 t e^{2t} - c_2 e^{2t}(1 + t)\,; \\ \text{con} \quad c_1\,, c_2 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Cuestión 8 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\vec{X}'(t) = A\,\vec{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:
Autovalores de la matriz A: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.
Vector propio: $V = (2, 1)$.
Solución:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= c_1 e^{t}(2t + 1) - 4c_2 t e^{t}\,; \\ X_2(t) &= c_1 t e^{t} - c_2 e^{t}(2t - 1)\,; \\ \text{con} \quad c_1\,, c_2 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Cuestión 9 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\vec{X}'(t) = A\,\vec{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:
Autovalores de la matriz A: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
Vector propio: $V = (1, 2)$.
Solución:

$$\begin{array}{rcl} X_1(t) & = & c_1(4t+1) - 2c_2 t\,; \\ X_2(t) & = & 8c_1 t + c_2(-4t+1)\,; \\ \text{con} \quad c_1\,, c_2 \in \mathbb{R} & & \end{array}$$

Cuestión 10 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $\vec{X}'(t) = A\,\vec{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}, \ \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:
Autovalores de la matriz A: $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$.
Vector propio: $V = (1, 1)$.
Solución:

$$\begin{array}{rcl} X_1(t) & = & e^{-3t}(4t+3)\,; \\ X_2(t) & = & e^{-3t}(4t+2)\,; \end{array} \tag{1}$$

Cuestión 11 Se considera el siguiente Problema de Valor Inicial (PVI):

$$y'' + 4y' + 3y = 0\,; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 2\,.$$

Se pide:

i) Aplicar el cambio de variables $X_1 = y\,; X_2 = y'$, con $\vec{X} = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ para transformar el PVI anterior en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \vec{X}(t)\,; \quad \text{bajo la condición inicial} \quad \vec{X}(0) = (1, 2)^{\mathrm{T}}.$$

ii) Resolver el sistema del apartado anterior.

SOLUCIÓN:

1. Si sustituimos en la EDO del enuciado $X_1 = y$, $X_2 = y'$ obtenemos:

$$X_1' = y' = X_2\,; \quad X_2' = y'' = -4y' - 3y = -4X_2 - 3X_1\,.$$

Escribiendo los resultados en forma matricial se obtiene,

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1' = X_2 \\ X_2' = -4X_2 - 3X_1 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

donde $y(0) = X_1(0) = 1\,;\ y'(0) = X_2(0) = 2$, por tanto $\vec{X}(0) = (1, 2)^T$.

2. Los valores propios de la matriz son $r = -3$ y $r = -1$ y los vectores propios correspondientes $v = (1\,,\,-3)^T$ y $w = (1\,,\,-1)^T$.
   La solución queda
$$\vec{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}\,.$$
   Por la condición inicial $\vec{X}(t) = (1,2)^T$ se obtiene que $C_1 = -\frac{3}{2}$, $C_2 = \frac{5}{2}$. Finalmente,
$$\vec{X}(t) = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-3t} + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}\,.$$

Cuestión 12 Dado el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:
$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 6x_1 - 4x_2 \end{cases},$$
Se pide:

1. Resolver el sistema bajo la condición inicial $\vec{X}(0) = (x_1(0), x_2(0)) = (1,1)$.
2. Comprobar la solución obtenida en el apartado 1.

SOLUCIÓN:
Los valores propios de la matriz son $r = -1 \pm 3i$ y los vectores propios correspondientes $v = (1\,,\,1 \pm i)^T$.
Un conjunto fundamental de soluciones es:
$$\vec{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} e^{(-1+3i)t} \quad , \quad \vec{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(-1-3i)t}.$$
Para encontrar un conjunto de soluciones reales, debemos encontrar la parte real e imaginaria $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$ de $\vec{X}_1(t)$ ó $\vec{X}_2(t)$.
$$\vec{X}_1(t) = \underbrace{e^{-t}\begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \cos(3t)+\sin(3t) \end{pmatrix}}_{\vec{u}(t)} + \underbrace{e^{-t}\begin{pmatrix} \sin(3t) \\ -\cos(3t)+\sin(3t) \end{pmatrix}}_{\vec{v}(t)} i$$
Para comprobar que las partes real e imaginaria son linealmente independientes, calculamos el wronskiano:
$$W(\vec{u},\vec{v})(t) = -e^{-2t} \neq 0\,,\,\forall t\,.$$
Por la condición inicial $\vec{X}(0) = (1,1)^T$ tenemos que $C_1\vec{u}(0) + C_2\vec{v}(0) = (1,1)^T$ y se obtiene que $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Finalmente,
$$\vec{X}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \cos(3t)+\sin(3t) \end{pmatrix}.$$

Para comprobar que la solución es correcta vemos si se cumplen las ecuaciones
$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 6x_1 - 4x_2 \end{cases}$:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= e^{-t}(2\cos(3t) - 3\cos(3t) - 3\sin(3t)) = -e^{-t}(\cos(3t) + 3\sin(3t)) = x_1' \\ 6x_1 - 4x_2 &= e^{-t}(6\cos(3t) - 4\cos(3t) - 4\sin(3t)) = e^{-t}(2\cos(3t) - 4\sin(3t)) = x_2' \end{aligned}$$

Cuestión 13 Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ que satisface la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, se pide:

(a) Hallar la solución $\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$.

(b) Resolver el siguiente problema de valor inicial.

$$y'' - 6y' + 9y = 0; \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 6,$$

(c) Aplicando el cambio de variables, $X_2(t) = y(t)$, demostrar que el sistema de ecuaciones es equivalente al problema de valor inicial del apartado (b). Comparar las soluciones obtenidas en los apartados (a) y (b)

SOLUCIÓN:
a) Para hallar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales calculamos los valores y vectores propios de la matriz de coeficientes A. Resolviendo la ecuación $|A - \lambda I| = 0$ se obtiene el autovalor doble $\lambda = 3$.
Un vector propio asociado a $\lambda = 3$ es $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, dando lugar a la primera solución fundamental

$$\overrightarrow{X}^1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t},$$

y resolviendo el sistema $(A - 3I)\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v}$, se obtiene la segunda solución fundamental

$$\overrightarrow{X}^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{3t},$$

por tanto la solución general del sistema es:

$$\overrightarrow{X}(t) = C_1\overrightarrow{X}^1(t) + C_2\overrightarrow{X}^2(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{3t} \right],$$

Usando la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ se obtienen las constantes $C_1 = 2$ y $C_2 = -3$ y la solución del sistema es:

$$\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 - 3t)e^{3t} \\ (1 + 3t)e^{3t} \end{pmatrix},$$

b) Resolviendo la EDO de segundo orden y aplicando las condiciones iniciales se tiene: Resolviendo la EDO de segundo orden y aplicando las condiciones iniciales se tiene

$$\boxed{y(t) = e^{3t} + 3te^{3t}}$$

c) La segunda ecuación del sistema es $X_2'(t) = X_1(t) + 4X_2(t)$, derivando resulta $X_2''(t) = X_1'(t) + 4X_2'(t)$.

Por la primera ecuación del sistema sabemos que $X_1'(t) = 2X_1(t) - X_2(t)$.

Por otra parte, despejando en la segunda ecuación tenemos $X_1(t) = X_2'(t) - 4X_2(t)$.

Sustituyendo nos queda:

$X_2''(t) = 2X_1(t) - X_2(t) + 4X_2'(t) = 2(X_2'(t) - 4X_2(t)) - X_2(t) + 4X_2'(t) = 6X_2'(t) - 9X_2(t)$

Haciendo el cambio $X_2(t) = y(t)$, y transponiendo términos nos queda: $y'' - 6y' + 9y = 0$, con las condiciones iniciales $y(0) = X_2(0) = 1$ y $y'(0) = X_2'(0) = X_1(0) + 4X_2(0) = 2 + 4 = 6$, es decir exactamente el problema de valor inicial planteado en el apartado (b).

En cuanto a las soluciones se observa que $y(t)$ coincide con $X_2(t)$ y también, como $X_1(t) = X_2'(t) - 4X_2(t)$, resulta que:

$$\boxed{X_1(t) = y'(t) - 4y(t) = (6 + 9t)e^{3t} - 4((1 + 3t)e^{3t}) = (2 - 3t)e^{3t}}$$

Cuestión 14 Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, se pide:

(a) Hallar la solución general del sistema $\overrightarrow{X}(t)$.

(b) Encontrar <u>una</u> solución del sistema que esté acotada cuando $t \longrightarrow +\infty$.

SOLUCIÓN:

(a) La solución general del sistema se obtiene calculando los valores y vectores propios asociados a la matriz A. Para obtener los valores propios se resuelve $|A - \lambda I| = 0$, obteniendo $\lambda_1 = -4$ y $\lambda_2 = 5$ (reales y distintos). Además, unos vectores propios asociados son $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $\xi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivamente. Por lo tanto la solución general del sistema se puede escribir en la forma

$$\boxed{\overrightarrow{X}(t) = c_1\xi_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\xi_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-4t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}},$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

(b) A la vista de la solución general y, más especificamente, considerando las exponenciales que aparecen en su expresión podemos encontrar una solución acotada cuando $t \longrightarrow +\infty$, tomando las constantes $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$, obteniendo

$$\boxed{\overrightarrow{X}_p(t) \;=\; \xi_1 e^{\lambda_1 t} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-4t}},$$

Cuestión 15 Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$,
Se pide:

i) Hallar la solución general del sistema $\overrightarrow{X}(t)$

ii) Estudiar el comportamiento de la solución general cuando la variable $t \to -\infty$

SOLUCIÓN:

i) La solución general del sistema se obtiene calculando los valores propios y vectores propios asociados de la matriz A. Para obtener los valores propios se resuelve $|A - \lambda I| = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1 + i2\,, \lambda_2 = 1 - i2$.
Dado que los autovalores son números complejos conjugados entre sí, basta con calcular un vector propio asociado a cualquiera de ellos.
Por ejemplo, el vector propio asociado a $\lambda_1 = 1 + i2$ es $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$.
Para hallar la solución general vamos a calcular la parte real y la parte imaginaria de $\xi_1 e^{\lambda_1 t}$, obteniendo como parte real $U(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) + \cos(2t) \end{pmatrix} e^t$, y como parte imaginaria $V(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(2t) - \cos(2t) \end{pmatrix} e^t$, por tanto la solución general es

$$\boxed{\overrightarrow{X}(t) = c_1 U(t) + c_2 V(t)}$$

donde c_1, c_2 son constantes.

ii) Dado que $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$ y que las funciones $\sin(2t)$ y $\cos(2t)$ están acotadas se concluye que $\lim\limits_{t\to-\infty} U(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} V(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, y para cualquier valor de las constantes c_1 y c_2, se tiene

$$\boxed{\lim_{t\to-\infty} \overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Cuestión 16 Dado el sistema de ecuaciones $\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

a) Encontrar la solución que cumple la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = (2 \;\; 0)^T$.
b) Comprobar la solución obtenida.

SOLUCIÓN:
a) La matriz A tiene autovalores $\lambda_1 = 7 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -9$.

Sus autovectores asociados son, respectivamente, proporcionales a $\vec{\xi}_1 = (5,3)^T$ y $\vec{\xi}_2 = (1,-1)^T$.

La solución general, por lo tanto, viene dada por:

$$\overrightarrow{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} e^{7t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-9t}$$

.

Usando la condición inicial, obtenemos $\quad c_1 = 1/4 \quad \text{y} \quad c_2 = 3/4$

Nos queda finalmente:

$$\boxed{\overrightarrow{X}(t) = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} e^{7t} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-9t}\right]}$$

b) Haciendo operaciones comprobamos que:

$$\overrightarrow{X'}(t) = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 35 \\ 21 \end{pmatrix} e^{7t} + \begin{pmatrix} -27 \\ 27 \end{pmatrix} e^{-9t}\right]$$

$$A\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} e^{7t} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-9t}\right] = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 35 \\ 21 \end{pmatrix} e^{7t} + \begin{pmatrix} -27 \\ 27 \end{pmatrix} e^{-9t}\right]$$

con lo que se comprueba que la solución es correcta.

Y para la condición inicial

$$\overrightarrow{X}(0) = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cuestión 17 Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, Se pide:

i) Hallar la solución general del sistema $\overrightarrow{X}(t)$

ii) Estudiar el comportamiento de la solución general cuando la variable $t \to +\infty$

SOLUCIÓN:

i) La solución general del sistema se obtiene calculando los valores propios y vectores propios asociados de la matriz A. Para obtener los valores propios se resuelve $|A-\lambda I|=0 \Longrightarrow \lambda^2+2\lambda+1=0 \Longrightarrow \lambda=\lambda_1=\lambda_2=-1$, raíz real doble.

El vector propio asociado a $\lambda=-1$ es $\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Obtenemos una primera solución fundamental $\overrightarrow{X}_1(t)=\overrightarrow{V}e^{-t}=\begin{pmatrix}2\,e^{-t}\\e^{-t}\end{pmatrix}$.

Dado que el autovalor se repite, buscaremos otra solución fundamental de la forma $\overrightarrow{X}_2(t)=\overrightarrow{V}\,t\,e^{-t}+\overrightarrow{W}e^{-t}$, donde $\overrightarrow{W}$ satisface que $(A+I)\overrightarrow{W}=\overrightarrow{V}$. Resolviendo el sistema podemos tomar $\overrightarrow{W}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$. Así pues, $\overrightarrow{X}_2(t)=\begin{pmatrix}(2\,t\,-1)\,e^{-t}\\t\,e^{-t}\end{pmatrix}$.

La solución general del sistema viene dada por $\overrightarrow{X}(t)=c_1\,\overrightarrow{X}_1(t)+c_2\,\overrightarrow{X}_2(t)$, donde c_1 y c_2 son constantes. Por tanto la solución pedida es:

$$\boxed{\overrightarrow{X}(t)=\begin{pmatrix}(2\,c_1-c_2+2\,c_2\,t)\,e^{-t}\\(c_1+c_2\,t)\,e^{-t}\end{pmatrix}}$$

ii) Dado que para cualquier valor de las constantes c_1 y c_2 se verifica que $\lim\limits_{t\to+\infty}(2\,c_1-c_2+2\,c_2\,t)\,e^{-t}=0$, y que $\lim\limits_{t\to+\infty}(c_1+c_2\,t)\,e^{-t}=0$, se concluye que:

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty}\overrightarrow{X}(t)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}$$

Cuestión 18 Sea el sistema de ecuaciones $\overrightarrow{X}'=A\overrightarrow{X}(t)$, con $A=\begin{bmatrix}3&-5\\\alpha&-3\end{bmatrix}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Se pide:

a) Hallar la solución general cuando $\alpha=2$.

b) Resolver el sistema bajo la condición inicial $\overrightarrow{X}(0)=(3,\ 2)^T$ cuando $\alpha=0$.

SOLUCIÓN:

a) Calculamos en primer lugar los autovalores de la matriz de coeficientes.

Resolviendo la ecuación $|A-\lambda I|=0$ obtenemos $\lambda=\pm i$ como soluciones complejas conjugadas.

Para $\lambda=i$ un vector propio asociado es $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}5\\3-i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}i$,
luego la solución general del sistema es:

$$\boxed{\overrightarrow{X}(t)=C_1\begin{pmatrix}5\cos t\\3\cos t+\sin t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}5\sin t\\3\sin t-\cos t\end{pmatrix}}$$

b) Cuando $\alpha = 0$ la ecuación $|A - \lambda I| = 0$ tiene por soluciones $\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -3$

Para $\lambda_1 = 3$ se obtiene el autovector $\overrightarrow{v} = (1, \ \ 0)^T$, y para $\lambda_2 = -3 \quad \overrightarrow{w} = (5, \ \ 6)^T$

La solución general de la ecuación es, por lo tanto: $\overrightarrow{x(t)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} e^{-3t}$

Usando la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ los valores de las constantes son $c_1 = 4/3$ y $c_2 = 1/3$.

Por tanto la solución particular del sistema es:

$$\boxed{\overrightarrow{X}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4e^{3t} + 5e^{-3t} \\ 6e^{-3t} \end{pmatrix}}$$

Cuestión 19 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 5\,x_1(t) - 6\,x_2(t) \\ x_2'(t) = 3\,x_1(t) - \ x_2(t) \end{cases}$$

sabiendo que $x_1(0) = -1\,;\, x_2(0) = 2\,.$

SOLUCIÓN:

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Calculamos los autovalores de A resolviendo, $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0\,$, y se obtiene $\lambda_1 = 2 + i3\,;\lambda_2 = 2 - i3$

Los autovalores de A son complejos conjugados. Para hallar la solución del sistema de ecuaciones vamos a calcular un vector propio, $\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, asociado al autovalor $\lambda_1 = 2 + i3$. Para ello resolvemos la ecuación vectorial, $(A - \lambda_1 I)\vec{V} = \vec{0}$, y se obtiene : $\vec{V} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$. Ahora vamos a obtener la parte real e imaginaria de la solución fundamental del sistema de ecuaciones diferenciales dada por :

$$\hat{X}(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{V} = e^{2t}e^{i3t} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Re}(\hat{X}(t)) + i\ \mathrm{Im}(\hat{X}(t))\,,$$

usando la fórmula de Euler, $e^{i3t} = \cos(3t) + i\sin(3t)$ y operando se tiene:

$$\mathrm{Re}(\hat{X}(t)) = \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos(3t) - \sin(3t)) \\ e^{2t}\cos(3t) \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Im}(\hat{X}(t)) = \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos(3t) + \sin(3t)) \\ e^{2t}\sin(3t) \end{pmatrix}.$$

La solución general del sistema es $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1\,\mathrm{Re}(\hat{X}(t)) + c_2\,\mathrm{Im}(\hat{X}(t))$, donde las constantes c_1, c_2, se obtienen con el dato inicial $x_1(0) = -1\,;\, x_2(0) = 2\,.$

En efecto, $x_1(0) = -1 = c_1 + c_2$, $x_2(0) = 2 = c_1 \quad \Longrightarrow c_1 = 2\,, c_2 = -3\,.$ Finalmente la solución pedida es

$$\boxed{X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2t}(\cos(3t) + 5\sin(3t)) \\ e^{2t}(2\cos(3t) - 3\sin(3t)) \end{pmatrix}}$$

Cuestión 20 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1'(t) = 3\,x_1(t) + 2\,x_2(t) \\ x_2'(t) = -2\,x_1(t) + 3\,x_2(t) \end{array} \right.$$

sabiendo que $x_1(0) = 2\,;\; x_2(0) = -1\,.$

SOLUCIÓN:
La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculamos los autovalores de A resolviendo, $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$, y se obtiene $\lambda_1 = 3 + i2\,;\lambda_2 = 3 - i2$
Los autovalores de A son complejos conjugados. Para hallar la solución del sistema de ecuaciones vamos a calcular un vector propio, $\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, asociado al autovalor $\lambda_1 = 3 + i2\,.$ Para ello resolvemos la ecuación vectorial, $(A - \lambda_1 I)\vec{V} = \vec{0}$, y se obtiene : $\vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Ahora vamos a obtener la parte real e imaginaria de la solución fundamental del sistema de ecuaciones diferenciales dada por :

$$\hat{X}(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{V} = e^{3t}e^{i2t}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \mathrm{Re}(\hat{X}(t)) + i\ \mathrm{Im}(\hat{X}(t))\,,$$

usando la fórmula de Euler, $e^{i2t} = \cos(2t) + i\sin(2t)$ y operando se tiene:

$$\mathrm{Re}(\hat{X}(t)) = \begin{pmatrix} e^{3t}\cos(2t) \\ -e^{3t}\cos(2t) \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Im}(\hat{X}(t)) = \begin{pmatrix} e^{3t}\sin(2t) \\ e^{3t}\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

La solución general del sistema es $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1\,\mathrm{Re}(\hat{X}(t)) + c_2\,\mathrm{Im}(\hat{X}(t))$, donde las constantes c_1, c_2, se obtienen con el dato inicial $x_1(0) = -1\,;\; x_2(0) = 2\,.$
En efecto, $x_1(0) = 2 = c_1$, $x_2(0) = -1 = c_2 \quad \Longrightarrow c_1 = 2\,, c_2 = -1\,.$ Finalmente la solución pedida es

$$\boxed{X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t}(2\cos(2t) - \sin(2t)) \\ -e^{3t}(\cos(3t) + 2\sin(3t)) \end{pmatrix}}$$
