uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

BY NC SA

CÁLCULO DIFERENCIAL APLICADO
TEMA 4: Problemas con valores en la frontera.
PROBLEMAS

Autores:
Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin y Rocio Vega

---

Cuestión 1

Hallar la solución del siguiente problema con valores en la frontera:

$$y'' + 5y = 0\,; \quad y(0) = 1\,;\, y(\pi) = 0\,.$$

SOLUCIÓN:
La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{5}x) + c_2 \sin(\sqrt{5}x)\,, \quad \text{with} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

La primera condición de frontera da $c_1 = 1$ y la segunda da $c_1 \cos(\sqrt{5}\pi) + c_2 \sin(\sqrt{5}\pi) = 0 \implies c_2 = -\cot(\sqrt{5}\pi)$, entonces, el problema tiene una única solución:

$$y(x) = \cos(\sqrt{5}x) - \cot(\sqrt{5}\pi) \sin(\sqrt{5}x)\,.$$

Cuestión 2

Resolver el problema con valores en la frontera:

$$y'' + y = 0\,; \quad y(0) = 1\,;\, y(\pi) = \alpha\,,$$

donde α es un número real dado.

SOLUCIÓN:
La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)\,, \quad \text{con} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

La primera condición de frontera implica que $c_1 = 1$ y la segunda da $-c_1 = \alpha$.
Estas dos condiciones sobre c_1 son incompatibles si $\alpha \neq -1$, por tanto, el problema no tiene solución

en este caso.
Sin embargo, si $\alpha = -1$, entonces se satisfacen ambas conodiciones de frontera siempre que $c_1 = 1$, independientemente de los valores que tome c_2. En este caso el problema tiene infinitas soluciones de la forma:

$$y(x) = \cos(x) + c_2 \sin(x)\,,$$

donde c_2 es arbitraria.

Cuestión 3

Hallar la solución del siguiente problema con valores en la frontera:

$$y'' + 5y = 0\,; \quad y(0) = 0\,;\, y(\pi) = 0\,.$$

SOLUCIÓN:
La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)\,, \quad \text{with} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

La primera condición de frontera implica que $c_1 = 0$ y la segunda da $c_2 = 0$,
por tanto el problema tiene por única solución: $y(x) = 0\,, \quad \forall x \in [0, \pi]\,.$

Cuestión 4

Resolver el problema con valores en la frontera:

$$y'' + y = 0\,; \quad y(0) = 0\,;\, y(\pi) = 0\,.$$

SOLUCIÓN:
La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)\,, \quad \text{with} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

La primera condición de frontera da $c_1 = 0$.
Por otro lado, dado que $\sin(\pi) = 0$, la segunda condición de frontera se satisface también sin importar los valores que tome the second c_2. Así pues, la solución del problema es $y = c_2 \sin(x)$, donde c_2 es arbitraria, por tanto el problema tiene infinitas soluciones.

Cuestión 5 Dado el siguiente problema con valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X'(0) = 0\,, \;\; X'(\pi/3) = 0\,,$$

hallar los valores del parámetro $\lambda \geq 0$ que da lugar a soluciones no nulas.

SOLUCIÓN:
Distingamos dos casos casos.
Caso 1. $\lambda = 0$
$X'' = 0 \implies X(x) = c_1 x + c_2$ con $c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}$. Dado que $X'(x) = c_1$, tenemos que $X'(0) = 0 = c_1 = X'(\pi/3)$. Por tanto, si $\boxed{\lambda = 0}$ entonces la función $X(x) = c_2 \neq 0$ es una solución no nula del problema.

Caso 2. $\lambda > 0$
Tomemos $\lambda = a^2$, con $a > 0$. La ecuación característica correspondiente es $r^2 + a^2 = 0 \implies r = \pm ia\,,\ i \in \mathbb{C}$. Por lo tanto

$$X(x) = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax)\,; \quad X'(x) = -ac_1 \sin(ax) + ac_2 \cos(ax)\,, \text{ con } c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Aplicando las condiciones de frontera obtenemos $X'(0) = 0 \implies c_2 = 0$; $X'(\pi/3) = 0 \implies -ac_1 \sin(a\pi/3) = 0$. Entonces, imponiendo $c_1 \neq 0$ se obtiene $\sin(a\pi/3) = 0 \implies a\pi/3 = n\pi \implies a = 3n\,,\ n = 1, 2, 3, \ldots$. Finalmente,

$$\boxed{\lambda = (3n)^2 = 9n^2\,,\;\; n = 1, 2, 3, \ldots}$$

Cuestión 6 Resolver el siguiente problema con valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X'(0) = 0\,, \;\; X(1) = 0\,,$$

y hallar los valores del parámetro $\lambda > 0$ que da lugar a soluciones no nulas.

SOLUCIÓN:
La solución general es $X = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$ que da lugar a $c_2 = 0$ y entonces $\cos\sqrt{\lambda} = 0$. Por tanto,

$$\sqrt{\lambda} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \implies \lambda_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

y las soluciones correspondientes son:

$$X_n(x) = \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

Cuestión 7 Resolver el siguiente problema:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X(0) = 0\,, \;\; X'(1) = 0\,,$$

y hallar los valores del parámetro $\lambda > 0$ que da lugar a soluciones no nulas.

SOLUCIÓN:
La solución general de la EDO es, $X = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$, que da lugar a $X(0) = c_1 = 0$, y $X'(1) = c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0$.
Entonces $\sqrt{\lambda} = (2n-1)\pi/2$, $n = 1, 2, \ldots$.
Y lasc correspondientes soluciones son:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right).$$

Cuestión 8 Resolver el problema:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X(0) = 0\,, \;\; X(1) = 0\,,$$

y hallar los valores $\lambda > 0$ que dan soluciones no nulas.

SOLUCIÓN:
La solución es $\lambda_n = n^2\pi^2$, $X_n(x) = \sin(n\pi x)$, $n = 1, 2, \ldots$. ¿Por qué?. La solución general de la EDO es $X = c_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$. $X(0) = c_1 = 0$ y $X(1) = c_2\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$, que da $\sqrt{\lambda} = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$.

Cuestión 9 Hallar los autovalores y autofunciones del siguiente problema y expandir la función $f(x) = e^x$ en términos de las autofunciones:

$$\begin{aligned} &u'' + \lambda u = 0\,, \quad x \in (0,1), \\ &u(0) = 0, \quad u'(1) = 0\,. \end{aligned}$$

SOLUCIÓN:
La solución general de la EDO es $u(x) = c_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$. Las condiciones de frontera dan $c_1 = 0$ y $\sqrt{\lambda}\,\cos\sqrt{\lambda} = 0$. Entonces $\sqrt{\lambda} = (2n-1)\pi/2$, $n = 1, 2, \ldots$. Tenemos

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}, \quad u_n(x) = \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Los coeficientes de Fourier de $f(x) = e^x$ son

$$\begin{aligned} f_n &= 2\int_0^1 e^x \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}\,dx = 2\mathrm{Im}\int_0^1 \exp\left[\left(1 + i\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)x\right]dx = 2\mathrm{Im}\frac{ee^{i(2n-1)\pi/2} - 1}{1 + i\frac{(2n-1)\pi}{2}} \\ &= 2\mathrm{Im}\frac{e^{in\pi}e^{-i\pi/2}e - 1}{1 + i\frac{(2n-1)\pi}{2}} = 2\mathrm{Im}\frac{-i(-1)^n e - 1}{1 + i\frac{(2n-1)\pi}{2}} = -2\mathrm{Im}\frac{[1 + (-1)^n ie][1 - i\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi]}{1 + \pi^2\left(n - \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= -2\frac{(-1)^n e - \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi}{1 + \pi^2\left(n - \frac{1}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$f_n = \frac{(2n-1)\pi - (-1)^n 2e}{1+\pi^2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

También, integrando por partes dos veces (tomando siempre $dv = e^x dx$, por tanto $v = e^x$),

$$\begin{aligned}
f_n &= 2\int_0^1 e^x \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}\,dx = 2e^x \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}\Big|_0^1 - (2n-1)\pi\int_0^1 e^x \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}\,dx \\
&= 2e(-1)^{n+1} - (2n-1)\pi e^x \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}\Bigg|_0^1 - \frac{(2n-1)^2\pi^2}{2}\int_0^1 e^x \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}\,dx \\
&= 2e(-1)^{n+1} + (2n-1)\pi - \frac{(2n-1)^2\pi^2}{2}\frac{f_n}{2}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\left[1+\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}\right] f_n = 2e(-1)^{n+1} + (2n-1)\pi \Longrightarrow f_n = \frac{(2n-1)\pi - (-1)^n 2e}{1+\pi^2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}.$$
