CÁLCULO DIFERENCIAL APLICADO
TEMA 5: Series de Fourier y separación de variables: Ecuación del calor.
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Autores:
Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin y Rocio Vega

---

Cuestión 1 Consideremos la ecuación del calor

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,,\;\; t>0\,,\;\; x\in[0,L]\,,$$

sometida a las condiciones de frontera siguientes:

$$\begin{array}{ll} (CC) & u(0,t)=0\,,\;\; u(L,t)=0\,,\;\; \forall t>0\,, \\ (CI) & u(x,0)=f(x)\,,\;\; \forall x\in[0,L]\,. \end{array}$$

La solución a este problema de valores en la frontera se expresa:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

donde

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x\,, \quad \text{con } n\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$$

Se pide:

i) Deducir, con todo detalle, las expresiones de A_n, $n\in\mathbb{N}$, sabiendo que

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,, & m\neq n \\ L/2\,, & m=n \end{cases}\,.$$

ii) Tomando $L=\pi$, hallar la solución $u(x,t)$, para

$$f(x)=3\,\sin(2x)+\frac{5}{3}\,\sin(4x).$$

Cuestión 2 Dado el siguiente problema de ecuación del calor:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,, \quad 0 < x < \pi\,,\ t > 0 \\
u(0,t) &= 0\ ,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0\,, \quad t > 0\,, \text{(condiciones frontera)} \\
u(x,0) &= f(x)\,, \quad 0 \leq x \leq \pi \text{ (condición inicial con } f(x) \text{ función conocida)}
\end{aligned}$$

Se pide:

1. Aplicar el método de separación de variables tomando $u(x,t) = X(x)T(t)$ y hallar la ecuación diferencial que satisface la función $T(t)$
2. Demostrar que la función $X(x)$ satisface el problema de contorno:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0; \quad X(0) = 0; \quad X'(\pi) = 0\,;$$

3. Hallar los autovalores y las autofunciones del problema del apartado ii)

Cuestión 3 Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{aligned}
\text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} &: \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,,\ t > 0\,,\ 0 < x < \pi/3 \\
\text{Condiciones de Contorno (CC)} &: \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0\,,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi/3,t) = 0\,,\ t > 0\,, \\
\text{Condición Inicial (CI)} &: u(x,0) = 2x + 1\,,\ 0 \leq x \leq \pi/3\,.
\end{aligned}$$

Aplicando separación de variables $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, se pide:

i) Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X'(0) = 0\,; X'(\pi/3) = 0\,;$$

y hallar los valores de la constante de separación $\lambda \geq 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

ii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-9n^2 t} \cos(3nx)\ ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,,$$

hallar el valor aproximado de $u(\pi/6, 1/9)$, tomando solamente los tres primeros sumandos de la serie anterior.

Nota: Puede ser útil el siguiente resultado:

- Dados $L > 0$ y $m\,, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,;\ m \neq n \\ L/2\,;\ m = n \neq 0 \\ L\,;\ m = n = 0 \end{cases}$

Cuestión 4 Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,,\ \ t > 0\,,\ \ 0 < x < \pi/3 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0\,,\ \ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi/3,t) &= 0\,,\ \ t > 0\,, \\ u(x,0) &= 2x + 1\,,\ \ 0 \leq x \leq \pi/3\,. \end{aligned}$$

(a) Aplicando el método de separación de variables $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, demostrar que $T(t) = ce^{-\alpha t}$, siendo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y α la constante de separación.

(b) Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \alpha X = 0\,; \quad X'(0) = 0\,;\ X'(\pi/3) = 0\,;$$

y hallar los valores de $\alpha \geq 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

(c) Hallar la solución $u(x,t)$ del problema.

Cuestión 5 Dado el siguiente problema de ecuación del calor:

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \qquad 0 < x < \pi\ , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0\ , \qquad t > 0\ , \quad \text{(condiciones de frontera)}$$

$$u(x,0) = f(x)\ , \qquad 0 \leq x \leq \pi \qquad \text{(condición inicial)}$$

a) Aplicar el método de separación de variables tomando $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ y hallar la ecuación diferencial que satisface la función $T(t)$, tomando como constante de separación $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Hallar el problema de contorno que satisface la función $X(x)$ y los valores de $\lambda > 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

c) Escribir la solución general $u(x,t)$ del problema y obtener la solución concreta cuando $f(x) = 2(\sin(3x) - \sin(4x))$.

Cuestión 6 Hallar la solución del siguiente modelo de ecuación del calor, siguiendo los pasos que se indican:

$$\begin{aligned}
\text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} &: \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,; \;\; t>0\,, \;\; 0<x<4\,,\\
\text{Condiciones de Contorno (CC)} &: \quad u(0,t)=0\,, \;\; u(4,t)=0\,; \;\; t>0\,,\\
\text{Condición Inicial (CI)} &: \quad (\mathbf{i})\; u(x,0)=f(x)=4\sin(\frac{3\pi}{4}x)\,.
\end{aligned}$$

Paso 1: Tomando $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, aplicar el método de separación de variables, llamando λ a la constante de separación.

Paso 2: Demostrar que la función $T(t)$ satisface la ecuación $T' + 4\lambda T = 0$, y resolverla.

Paso 3: Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X(0)=0\,;\, X(4)=0\,;$$

y hallar los valores $\lambda > 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

Paso 4: Escribir la solución $u(x,t)$ en forma de serie, teniendo en cuenta las funciones $T(t)$ y $X(x)$ obtenidas en los pasos 2 y 3.

Paso 5: Usar la condición inicial (CI) para hallar, finalmente, la solución del modelo.
