CÁLCULO DIFERENCIAL APLICADO
TEMA 6: Series de Fourier y separación de variables: Ecuación de onda.
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Autores:
Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin y Rocio Vega

---

Cuestión 1 Consideremos el siguiente modelo de ecuación de onda:

$$\begin{aligned}
\text{Ecuación en Derivadas Parciales} &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,; \;\; t>0\,, \;\; 0<x<\pi \\
\text{Condiciones de Contorno} &: \quad u(0,t)=0\,, \;\; u(\pi,t)=0\,; \;\; t>0 \\
\text{Condiciones Iniciales} &: \quad (\mathbf{i})\;\; u(x,0) = 5\sin(2x) - 2\sin(5x)\,, \quad (\mathbf{ii})\;\; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0\,, \;\; 0\le x\le \pi\,.
\end{aligned}$$

Aplicando separación de variables y la condición (**ii**), la solución formal del modelo puede escribirse como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt)\sin(nx)\;; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Hallar el valor de $u(\pi/4, \pi/4)$

Nota: En caso necesario, podría ser útil el siguiente resultado:

- Dados $L>0$ y $m\,, n \in \mathbb{N}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,; & m\neq n \\ L/2\,; & m=n \end{cases}$

Cuestión 2 Consideremos el siguiente modelo de ecuación de onda.

$$\begin{aligned}
\text{Ecuación Derivadas Parciales} &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,,\ \ t>0\,,\ \ 0<x<\pi \\
\text{Condiciones Contorno} &: \quad u(0,t)=0\,,\ \ u(\pi,t)=0\,,\ \ t\geq 0 \\
\text{Condiciones Iniciales} &: \quad (\mathbf{i})\ \ u(x,0)=\sum_{k=1}^{4} k^2\sin(kx)\,,\ \ (\mathbf{ii})\ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0\,,\ \ 0\leq x\leq\pi\,.
\end{aligned}$$

Aplicando separación de variables la solución formal del modelo puede escribirse

$$u(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(nt)\,\sin(nx)\;, \quad \text{con}\ \ A_n\in\mathbb{R}\,.$$

Hallar los coeficientes $A_n\,, \forall n\geq 1$ y expresar $u(x,t)$ como una suma finita.

Cuestión 3 Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
\text{Ecuación en Derivadas Parciales} &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,;\ \ t>0\,,\ \ 0<x<\pi \\
\text{Condiciones de Contorno} &: \quad u(0,t)=0\,,\ \ u(\pi,t)=0\,;\ \ t>0 \\
\text{Condiciones Iniciales} &: \quad (\mathbf{i})\ u(x,0)=7\sin(3x)-3\sin(7x)\,,\quad (\mathbf{ii})\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0\,,\ \ 0\leq x\leq\pi\,.
\end{aligned}$$

Se pide:

i) Tomando $u(x,t)=X(x)\,T(t)\not\equiv 0$, aplicar el método de separación de variables y demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X''+\lambda X=0\,;\quad X(0)=0\,;\ X(\pi)=0\,;$$

y hallar los valores de la constante de separación $\lambda>0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

ii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(nt)\sin(nx)\;;\quad \text{con}\ A_n\in\mathbb{R}\,.$$

Hallar el valor de $u(\pi/2,\pi)$

Cuestión 4 Consideremos el siguiente modelo:

$$\begin{array}{rcl}
\text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} & : & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,;\ \ t>0\,,\ \ 0<x<\pi\,, \\
\text{Condiciones de Contorno (CC)} & : & u(0,t)=0\,,\ \ u(\pi,t)=0\,;\ \ t>0 \\
\text{Condiciones Iniciales (CI)} & : & (\mathbf{i})\ u(x,0) = 4\sin(x) - 2\sin(3x) \\
 & y & (\mathbf{ii})\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,,\ \ 0 \le x \le \pi\,.
\end{array}$$

Se pide:

i) Clasificar el tipo de modelo indicando específicamente el significado de las condiciones de contorno (CC) e iniciales (CI).

ii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt)\sin(nx)\ ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Hallar el valor de los coeficientes A_n y obtener la solución $u(x,t)$.

iii) Comprobar la solución obtenida en el apartado ii)

Cuestión 5 Dado el siguiente problema modelo de ecuación de ondas:

$$\begin{array}{llll}
4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t), & 0<x<\pi\,, \quad t>0 & & \\
\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t)=0\,, & t>0\,, & \text{(condiciones de frontera)} & \\
u(x,0) = 3\cos x\,, & 0 \le x \le \pi & \text{(posición inicial)} & \\
\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1-\cos 4x\,, & 0 \le x \le \pi & \text{(velocidad inicial)} &
\end{array}$$

a) Aplicar el método de separación de variables tomando $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ y hallar la ecuación diferencial que satisface la función $T(t)$.

b) Hallar el problema de contorno que satisface la función $X(x)$ y los valores de $\lambda \ge 0$ que dan lugar a soluciones no nulas, siendo λ la constante de separación.

c) Hallar la solución $u(x,t)$ del problema.
