uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

CÁLCULO DIFERENCIAL APLICADO
TEMA 6: Series de Fourier y separación de variables: Ecuación de onda.
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Autores:
Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin y Rocio Vega

---

Cuestión 1 Consideremos el siguiente modelo de ecuación de onda:

$$\begin{aligned} \text{Ecuación en Derivadas Parciales} &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,;\ \ t>0\,,\ \ 0<x<\pi \\ \text{Condiciones de Contorno} &: \quad u(0,t)=0\,,\ \ u(\pi,t)=0\,;\ \ t>0 \\ \text{Condiciones Iniciales} &: \quad \textbf{(i)}\ u(x,0) = 5\sin(2x) - 2\sin(5x)\,,\quad \textbf{(ii)}\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0\,,\ \ 0\le x\le\pi\,. \end{aligned}$$

Aplicando separación de variables y la condición (**ii**), la solución formal del modelo puede escribirse como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt)\sin(nx)\ ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Hallar el valor de $u(\pi/4, \pi/4)$

Nota: En caso necesario, podría ser útil el siguiente resultado:

- Dados $L>0$ y $m\,,n\in\mathbb{N}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,;\ m\neq n \\ L/2\,;\ m=n \end{cases}$

SOLUCIÓN:

Tomando $t=0$ en la solución formal se obtiene:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx)\ ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que la condición inicial (**i**) $u(x,0) = 5\sin(2x) - 2\sin(5x)$ viene dada por una combinación lineal de funciones de la forma $\sin(nx)$, con $n=1,2,3,\cdots$, podemos obtener los coeficientes A_n de la serie por simple identificación de los sumandos, esto es,

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) = 5\sin(2x) - 2\sin(5x)\,,$$

implica que:

$$A_1 = 0\,, A_2 = 5\,, A_3 = 0\,, A_4 = 0\,, A_5 = -2\,, A_n = 0 \quad \forall\; n > 5\,.$$

Otra alternativa para calcular los coeficientes A_n consiste en fijar $m \in \mathbb{N}$ y utilizar la nota del enunciado en la siguiente igualdad:

$$5\int_0^{\pi} \sin(2x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x - 2\int_0^{\pi} \sin(5x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x$$

Recopilando los valores de los coeficientes se obtiene la solución del problema de ondas, esto es,

$$u(x,t) = 5\cos(2t)\sin(2x) - 2\cos(5t)\sin(5x)\,,$$

por lo que

$$\boxed{u(\pi/4,\pi/4) = 5\cos(\pi/2)\sin(\pi/2) - 2\cos(5\pi/4)\sin(5\pi/4) = -1}$$

Cuestión 2 Consideremos el siguiente modelo de ecuación de onda.

$$\begin{array}{rcl} \text{Ecuación Derivadas Parciales} & : & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \;=\; \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,,\;\; t > 0\,,\;\; 0 < x < \pi \\ \text{Condiciones Contorno} & : & u(0,t) = 0\,,\;\; u(\pi,t) = 0\,,\;\; t \geq 0 \\ \text{Condiciones Iniciales} & : & (\mathbf{i})\;\; u(x,0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} k^2 \sin(kx)\,,\;\; (\mathbf{ii})\;\; \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,,\;\; 0 \leq x \leq \pi\,. \end{array}$$

Aplicando separación de variables la solución formal del modelo puede escribirse

$$u(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt)\,\sin(nx)\;, \quad \text{con}\;\; A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Hallar los coeficientes $A_n\,, \forall n \geq 1$ y expresar $u(x,t)$ como una suma finita.

SOLUCIÓN:

Tomando $t = 0$ en la solución formal se obtiene

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx)\;, \quad \text{con}\;\; A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que la condición inicial (**i**) $u(x,0) = \sum_{k=1}^{4} k^2 \sin(kx)$ viene dada por una combinación lineal de funciones de la forma $\sin(nx)$, con $n = 1, 2, 3, \ldots$, podemos obtener los coeficientes A_n de la serie por simple identificación de sumandos, esto es

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) = \sum_{k=1}^{4} k^2 \sin(kx) = \sin(x) + 4\sin(2x) + 9\sin(3x) + 16\sin(4x)$$

implica que

$$\boxed{A_1 = 1\,,\; A_2 = 4\,,\; A_3 = 9\,,\; A_4 = 16\,,\;\; A_n = 0\;\; \forall\; n \geq 5}$$

Recopilando los valores de los coeficientes, se obtiene la solución del problema de ondas, esto es

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{4} A_n \cos(nt)\sin(nx) = \cos(t)\sin(x) + 4\cos(2t)\sin(2x) + 9\cos(3t)\sin(3x) + 16\cos(4t)\sin(4x)}$$

Cuestión 3 Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{array}{rcl} \text{Ecuación en Derivadas Parciales} & : & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,;\;\; t>0\,,\;\; 0<x<\pi \\ \text{Condiciones de Contorno} & : & u(0,t)=0\,,\;\; u(\pi,t)=0\,;\;\; t>0 \\ \text{Condiciones Iniciales} & : & \textbf{(i)}\; u(x,0) = 7\sin(3x) - 3\sin(7x)\,,\quad \textbf{(ii)}\; \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,,\;\; 0\le x\le \pi\,. \end{array}$$

Se pide:

i) Tomando $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, aplicar el método de separación de variables y demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,;\quad X(0)=0\,;\, X(\pi)=0\,;$$

y hallar los valores de la constante de separación $\lambda > 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

ii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt)\sin(nx)\;;\quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Hallar el valor de $u(\pi/2,\pi)$

SOLUCIÓN:

i) Aplicado separación de variables a la ecuación en derivadas parciales se obtiene:

$$X''T = XT'' \Longrightarrow \frac{X''T}{XT} = \frac{XT''}{XT} \Longrightarrow \frac{X''}{X} = -\lambda = \frac{T''}{T}\,,$$

donde λ es la constante de separación.
Tenemos por un lado que $X'' + \lambda X = 0$, y, por otro lado, aplicando las condiciones de contorno

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0\,, \forall t \Longrightarrow X(0) = 0\,,\quad u(\pi,t) = X(\pi)T(t) = 0\,, \forall t \Longrightarrow X(\pi) = 0\,,$$

por tanto X satisface $X'' + \lambda X = 0$; $\quad X(0)=0$; $X(\pi)=0$; como se pedía.
Las soluciones no nulas del problema de contorno se obtienen para $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{\pi}\right)^2 = n^2$, con $n = 1,2,3,\cdots$, siendo $X_n(x) = \sin(\dfrac{n\pi x}{\pi}) = \sin(nx)$, para $n = 1,2,3,\cdots$

ii) Tomando $t = 0$ en la solución y teniendo en cuenta que $\cos(0) = 1$, se obtiene:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) \;; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Por otro lado, vemos que la condición inicial $u(x,0) = 7\sin(3x) - 3\sin(7x)$ viene dada por una combinación lineal de funciones de la forma $\sin(nx)$, con $n = 1, 2, 3, \cdots$, podemos obtener los coeficientes A_n de la serie por simple identificación de los sumandos, esto es,

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) = 7\sin(3x) - 3\sin(7x)\,,$$

implica que:

$$A_1 = 0\,, A_2 = 0\,, A_3 = 7\,, A_4 = 0\,, A_5 = 0\,, A_6 = 0\,, A_7 = -3\,, A_n = 0 \quad \forall\, n \geq 8\,.$$

La solución del problema es:

$$u(x,t) = 7\cos(3t)\sin(3x) - 3\cos(7t)\sin(7x)\,,$$

por lo que

$$\boxed{u(\pi/2,\pi) = 7\cos(3\pi)\sin(3\pi/2) - 3\cos(7\pi)\sin(7\pi/2) = 4}$$

Cuestión 4 Consideremos el siguiente modelo:

$$\begin{array}{rcl}
\text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} & : & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,;\;\; t > 0\,,\;\; 0 < x < \pi\,, \\
\text{Condiciones de Contorno (CC)} & : & u(0,t) = 0\,,\;\; u(\pi,t) = 0\,;\;\; t > 0 \\
\text{Condiciones Iniciales (CI)} & : & (\textbf{i})\; u(x,0) = 4\sin(x) - 2\sin(3x) \\
 & y & (\textbf{ii})\; \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,,\;\; 0 \leq x \leq \pi\,.
\end{array}$$

Se pide:

i) Clasificar el tipo de modelo indicando específicamente el significado de las condiciones de contorno (CC) e iniciales (CI).

ii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt)\sin(nx) \;; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,.$$

Hallar el valor de los coeficientes A_n y obtener la solución $u(x,t)$.

iii) Comprobar la solución obtenida en el apartado ii)

SOLUCIÓN:

i) Dado el tipo de ecuación en derivadas parciales (EDP), se trata de un modelo de la ecuación de ondas, que se puede aplicar a desplazamientos verticales de una cuerda unidimensional. En concreto las condiciones de contorno (CC) son de tipo Dirichlet y nos indican que la cuerda de longitud $L = \pi$ está anclada en los puntos $x = 0$ y $x = \pi$. Además la condición inicial (CI) (i) describe la posición inicial de la cuerda y la condición inicial (ii) indica que la velocidad inicial de la cuerda es nula.

ii) Los coeficientes A_n se pueden calcular usando las fórmulas integrales para este tipo de modelos, pero en este ejemplo en concreto podemos hallar los coeficientes por simple identificación. En efecto, considerando (CI) (i),
$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(0)\sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) = 4\sin(x) - 2\sin(3x)\,.$
Identificando coeficientes se tiene: $A_1 = 4\,, A_2 = 0\,, A_3 = -2\,, A_n = 0 \quad \forall\, n \geq 4\,.$
La solución del modelo es:

$$\boxed{u(x,t) = 4\cos(t)\sin(x) - 2\cos(3t)\sin(3x)\,,}$$

iii) Veamos primero las (CC):
$u(0,t) = 4\cos(t)\sin(0) - 2\cos(3t)\sin(0) = 0\,,$
$u(\pi,t) = 4\cos(t)\sin(\pi) - 2\cos(3t)\sin(3\,\pi) = 0\,,$
Veamos ahora las (CI):
$u(x,0) = 4\cos(0)\sin(x) - 2\cos(0)\sin(3\,x)$, y se verifica (CI)(i).
$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -4\sin(0)\sin(x) + 6\sin(0)\sin(3\,x) = 0$, y se verifica (CI)(ii).
Por último, veamos si se verifica la (EDP):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -4\sin(t)\sin(x)+6\sin(3t)\sin(3x) \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = -4\cos(t)\sin(x)+18\cos(3t)\sin(3x)\,.$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 4\cos(t)\cos(x)-6\cos(3t)\cos(3x) \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -4\cos(t)\sin(x)+18\cos(3t)\sin(3x)\,.$$

Con esto queda probado lo que se pide en el enunciado.

Cuestión 5 Dado el siguiente problema modelo de ecuación de ondas:

$$\begin{aligned}
&4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t), \qquad 0 < x < \pi\ , \quad t > 0 \\
&\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0\ , \quad t > 0\ , \quad \text{(condiciones de frontera)} \\
&u(x,0) = 3\cos x\ , \qquad 0 \leq x \leq \pi \qquad \text{(posición inicial)} \\
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 - \cos 4x\ , \quad 0 \leq x \leq \pi \qquad \text{(velocidad inicial)}
\end{aligned}$$

a) Aplicar el método de separación de variables tomando $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ y hallar la ecuación diferencial que satisface la función $T(t)$.

b) Hallar el problema de contorno que satisface la función $X(x)$ y los valores de $\lambda \geq 0$ que dan lugar a soluciones no nulas, siendo λ la constante de separación.

c) Hallar la solución $u(x,t)$ del problema.

SOLUCIÓN:

a) Aplicamos separación de variables tomando $u(x,t) = X(x)T(t)$. Sustituyendo esto en la EDP nos queda: $4X''T = XT'' \Rightarrow \dfrac{T''}{4T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda,$ donde λ es la constante de separación.

Por lo tanto $T(t)$ es la solución de la ecuación diferencial $\underline{T'' + 4\lambda T = 0}$.

b) La función $X(x)$ debe ser solución de $\underline{X'' + \lambda X = 0}$ y cumplir las condiciones frontera.

Separamos variables en dichas condiciones. En $x = 0$ tenemos $u_x(0,t) = X'(0)T(t) = 0$. Si fuera $T(t) = 0$ tendríamos la solución $u(x,t) = 0$ que no cumpliría la condición inicial $u(x,0) = f(x)$, luego debe ser $X'(0) = 0$.

En $x = \pi$ el razonamiento es similar, por lo que nos quedan las siguientes condiciones de contorno para $X(x)$: $\underline{X'(0) = 0 \qquad X'(\pi) = 0}$.

Para hallar las soluciones no nulas distinguimos dos casos:

$\boxed{\text{Caso } \lambda = 0}$, entonces $X'' = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 x + c_2$. Dado que $X'(x) = c_1$, se tiene que $X'(0) = 0 = c_1 = X'(\pi)$, por tanto se obtiene que $X(x) = c_2 \neq 0$ es solución no nula del problema.

$\boxed{\text{Caso } \lambda > 0}$, sea $\lambda = a^2$, con $a > 0$. La ecuación característica es: $r^2 + a^2 = 0 \Rightarrow r = \pm ia$
por tanto $X(x) = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax)$; luego $X'(x) = -ac_1 \sin(ax) + ac_2 \cos(ax)$

Aplicado las condiciones de contorno: $X'(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$.
Y con $X'(\pi) = 0 \Rightarrow -ac_1 \sin(a\pi) = 0$.
Imponiendo que $c_1 \neq 0$, se tiene: $\sin(a\pi) = 0 \Rightarrow a\pi = n\pi \Rightarrow \quad a = n$, con $n = 1, 2, 3, .$

Por tanto obtenemos los autovalores: $\lambda_n = n^2$, con $n = 1, 2, 3,$ y las autofunciones asociadas a estos autovalores son : $X_n(x) = \cos(nx)$

La solución de esta ecuación $\underline{T'' + 4\lambda T = 0}$:

$\boxed{\text{Caso } \lambda = 0}$, entonces $T' = k_1$ y por lo tanto $T = k_1 t + k_2$.

$\boxed{\text{Caso } \lambda > 0}$, $T'' + 4\lambda T = 0$ entonces $T'' + (2n)^2 T = 0$, por lo que $T_n = a_n \cos 2nt + b_n \sin 2nt$

b) La solución general para este problema es

$$u(x,t) = c_1(k_1 t + k_2) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(2nt)\cos(nx) + b_n \sin(2nt)\cos(nx))$$

Usando la primera condición inicial: $u(x,0) = c_1 k_2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = 3\cos x$,

obtenemos los coeficientes $c_1 k_2 = 0, \quad a_1 = -3, \quad a_n = 0, \quad \forall n \neq 1$

Para la otra condición inicial:

$$u_t(x,t) = c_1 k_1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2n(-a_n \sin(2nt)\cos(nx) + b_n \cos(2nt)\cos(nx))$$

Entonces

$$u_t(x,0) = 1 - \cos 4x = c_1 k_1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2n b_n \cos(nx)$$

y se obtienen los coeficientes: $c_1 k_1 = 1, \quad b_4 = -1/8, \quad b_n = 0, \quad \forall n \neq 4$

Teniendo en cuenta todo lo anterior resulta que la solución particular buscada es:

$$\boxed{u(x,t) = t + 3\cos 2t \cos x - 1/8 \sin 8t \cos 4x}$$
