CÁLCULO DIFERENCIAL APLICADO
TEMA 7: Series de Fourier y separación de variables: Ecuación de Laplace.
PROBLEMAS

Autores:
Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin y Rocio Vega

---

Cuestión 1

Hallar la solución del siguiente problema con valores en la frontera:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ \ x \in (0,1)\,, \ \ y \in (0,1)\\
&u(0,y) = 0\,, \ u(1,y) = 0\,, \ \ y \in [0,1],\\
&\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 1\,, \ u(x,1) = 0, \ \ x \in [0,1]\,.
\end{aligned}$$

SOLUCIÓN:
Aplicando separación de variables, $u = X(x)Y(y)$ tenemos que $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$.
Las condiciones de frontera homogéneas dan lugar a $X(0) = 0$, $X(1) = 0$, $Y(1) = 0$ y la única condición de frontera no homogénea ocurre en $y = 0$. Por tanto, asumimos que $\lambda > 0$ y resolvemos el problema de autovalores: $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = 0$, $X(1) = 0$.
La solución es $\lambda_n = n^2\pi^2$, $X_n(x) = \sin(n\pi x)$, $n = 1, 2, \ldots$. ¿Por qué?
La solución general de la EDO es $X = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$. $X(0) = c_1 = 0$ y $X(1) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}) = 0$, dan lugar a $\sqrt{\lambda} = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$.
Resolviendo ahora el problema $Y'' - \lambda Y = 0$ con $Y(1) = 0$, obtenemos $X_n(x) = \sinh[\sqrt{\lambda_n}(y-1)] = \sinh[n\pi(y-1)]$.
Aplicando el principio de superposición:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x)\sinh[n\pi(y-1)],$$

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n\pi \sin(n\pi x)\cosh(-n\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n\pi \cosh(n\pi)\sin(n\pi x).$$

Entonces

$$n\pi \cosh(n\pi) a_n = 2\int_0^1 \sin(n\pi x)dx = -\frac{2}{n\pi}\cos(n\pi x)|_0^1 = 2\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}.$$

Por tanto a_n es

$$a_n = \begin{cases} \frac{4}{n^2\pi^2\cosh(n\pi)}, & \text{odd } n, \\ 0, & \text{even } n. \end{cases}$$

y la solución del problema con valores en la frontera (PVF) es

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)\pi x]\sinh[(2n-1)\pi(y-1)]}{(2n-1)^2\cosh[(2n-1)\pi]}.$$

Cuestión 2 Hallar la solución del siguiente problema con valores en la frontera:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ \ x \in (0,1)\,, \ \ y \in (0,1)$$
$$u(0,y) = 0\,, \ u(1,y) = \sin\frac{\pi y}{2}\,, \ \ y \in [0,1],$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0\,, \ \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = 0, \ \ x \in [0,1]\,.$$

SOLUCIÓN:

Aplicando separación de variables, $u = X(x)Y(y)$ tenemos que $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$.

Las condiciones de contorno homogéneas dan lugar a $X(0) = 0$, $Y'(0) = 0$, $Y'(1) = 0$ y la única condición de frontera no homogénea ocurre en $x = 1$.

Por tanto asumimos que $\lambda > 0$ y resolvemos el problema de autovalores: $Y'' + \lambda Y = 0$, $Y'(0) = 0$, $Y'(1) = 0$.

La solución es $\lambda_n = n^2\pi^2$, $Y_n(y) = \cos(n\pi y)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. ¿Por qué?

La solución general de la EDO es $Y = c_1\cos(\sqrt{\lambda}y) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}y)$. $Y'(0) = \sqrt{\lambda}c_2 = 0$ y $Y'(1) = \sqrt{\lambda}c_1\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$, dan lugar a $c_2 = 0$, $\sqrt{\lambda} = n\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Resolviendo ahora el problema $X'' - \lambda X = 0$ con $X(0) = 0$, obtenemos

$X_n(x) = \sinh[\sqrt{\lambda_n}x] = \sinh(n\pi x)$. Para $n = 0$, $X_0 = a_0 x$.

Aplicando el principio de superposición:

$$u(x,y) = a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh(n\pi x)\cos(n\pi y),$$

$$\sin\frac{\pi y}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh(n\pi)\cos(n\pi y).$$

Entonces

$$a_0 = \int_0^1 \sin\frac{\pi y}{2}dy = \frac{2}{\pi},$$
$$a_n = 2\int_0^1 \sin\frac{\pi y}{2}\cos(n\pi y)dy = \int_0^1 \left(\sin\frac{(2n+1)\pi y}{2} - \sin\frac{(2n-1)\pi y}{2}\right)dy$$
$$= \frac{2}{(2n+1)\pi} - \frac{2}{(2n-1)\pi} = -\frac{4}{(4n^2-1)\pi}.$$

Por tanto la solución del problema con valores en la frontera (PVF) es

$$u(x,y) = \frac{2x}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \sinh(n\pi x)\cos(n\pi y).$$

Cuestión 3 Hallar la solución del siguiente problema con valores en la frontera:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \;\; x \in (0,1)\,, \;\; y \in (0,1) \\
&u(0,y) = 0\,, \;\; u(1,y) = 0\,, \;\; y \in [0,1], \\
&\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = e^{2x}\,, \;\; u(x,1) = 0, \;\; x \in [0,1]\,.
\end{aligned}$$

SOLUTION:
Aplicando separación de variables, $u = X(x)Y(y)$ tenemos que $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$.
Las condicione de contorno homogéneas dan lugar a $X(0) = 0$, $X(1) = 0$, $Y(1) = 0$ y la única condición de frontera no homogénea ocurre en $y = 0$.
Por tanto asumimos que $\lambda > 0$ y resolvemos el problema de autovalores: $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = 0$, $X(1) = 0$.
La solución es $\lambda_n = n^2\pi^2$, $X_n(x) = \sin(n\pi x)$, $n = 1, 2, \ldots$. ¿Por qué?
La solución general de la EDO es $X = c_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$. $X(0) = c_1 = 0$ y $X(1) = c_2\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$, dan lugar a $\sqrt{\lambda} = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$.
Resolviendo ahora el problema $Y'' - \lambda Y = 0$ con $Y(1) = 0$, obtenemos $X_n(x) = \sinh[\sqrt{\lambda_n}(y-1)] = \sinh[n\pi(y-1)]$.
Aplicando el principio de superposición:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x)\sinh[n\pi(y-1)],$$

$$e^{2x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n\pi \sin(n\pi x)\cosh(-n\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n\pi\cosh(n\pi)\sin(n\pi x).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
n\pi\cosh(n\pi)a_n &= 2\int_0^1 e^{2x}\sin(n\pi x)dx = 2\mathrm{Im}\int_0^1 e^{2x+in\pi x}dx = \mathrm{Im}\frac{2}{2+in\pi}(e^{2+in\pi}-1) \\
&= \mathrm{Im}\frac{2}{2+in\pi}[e^2(-1)^n - 1] = -\frac{2n\pi}{4+n^2\pi^2}[(-1)^n e^2 - 1].
\end{aligned}$$

Por tanto a_n es

$$a_n = \frac{2[1-(-1)^n e^2]}{(4+n^2\pi^2)\cosh(n\pi)},$$

y la solución del problema con valores en la frontera (PVF) viene dada por

$$u(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n e^2}{(4+n^2\pi^2)\cosh(n\pi)} \sin(n\pi x)\sinh[n\pi(y-1)].$$
