Universidad Carlos III de Madrid

Cálculo Diferencial Aplicado

Autoevaluación: Test 1

Autores:
Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin y Rocio Vega

---

Cuestión 1 Dado el problema de valor inicial

$$\text{(PVI)} \begin{cases} y\sin x + (2y - \cos x)y' = \dfrac{-x}{x^2+1}\,, & 0 \leq x \leq 1/2 \\[2ex] y(0) = 0 \end{cases}$$

clasificar, razonadamente, la ecuación diferencial y resolver el PVI.

SOLUCIÓN:
Es una EDO de primer orden no lineal.
Reescribimos la ecuación diferencial como

$$\frac{x}{x^2+1} + y\sin x + (2y - \cos x)y' = 0\,,$$

donde es fácil comprobar que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+1} + y\sin x\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2y - \cos x)\,,$$

con lo que la ecuación diferencial es **exacta**. Por lo tanto existirá una función $F(x,y)$ tal que $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2+1} + y\sin x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y - \cos x$, y dado que $y = y(x)$, se tiene:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0\,.$$

Obtenemos la función F integrando $\dfrac{\partial F}{\partial x}$:

$$F = \int\left(\frac{x}{x^2+1} + y\sin x\right)dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - y\cos x + \phi(y)\,.$$

Para obtener el valor de la función $\phi(y)$ derivamos el anterior resultado respecto de y y lo igualamos a $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y - \cos x$, con lo que obtenemos la ecuación diferencial $\phi'(y) = 2y$ y así $\phi(y) = y^2 + C_1$. Por lo tanto

$$F = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - y\cos x + y^2 + C_1$$

De $\dfrac{dF}{dx} = 0$ concluimos que

$$y^2 - y\cos x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = C$$

Teniendo en cuenta que $y(0) = 0$ se obtiene que $C = 0$. La solución explícita del PVI es

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(\cos x - \sqrt{\cos^2 x - 2\ln(x^2+1)}\right)$$

Cuestión 2 Resolver la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$y \;=\; (x + \sqrt{xy})\; y'$$

para $x > 0$, junto con la condición inicial $y(1) = 1$.

SOLUCIÓN:
Se trata de una ecuación no lineal, *homogénea*, de primer orden. Para resolverla, podemos usar el cambio de variable $v = y/x$, obteniendose $xv' + v = y'$. Entonces

$$-vx + \left(x + \sqrt{x^2 v}\right)\,\left(v'x + v\right) \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad v'\,\left(x^2 + x^2\sqrt{v}\right) + x\,v^{3/2} \;=\; 0$$

$$\Longrightarrow\quad v'\,\left(v^{-3/2} + \frac{1}{v}\right) + \frac{1}{x} \;=\; 0\,,$$

que es una ecuación separable en la variable v. Por tanto, obtenemos

$$-2\,v^{-1/2} + \ln|v| + \ln x \;=\; c\,,$$

donde c es una constante arbitraria. Finalmente, usando $v = y/x$ y la condición inicial $y(1) = 1$, una expresión implícita de la solución es

$$\boxed{-2\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln\frac{|y|}{x} + \ln x \;=\; -2\,.}$$

Cuestión 3 Resolver la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$y^2 \;+\; \left(2xy - \cos x - \frac{1}{1+y^2}\right)\, y' \;=\; -y\,\sin x$$

junto con la condición inicial $y(\alpha) = 1$, donde α es un parámetro real.

SOLUCIÓN:
Sean $M(x,y) = y^2 + y\,\sin x$ y $N(x,y) = 2xy - \cos x - 1/(1+y^2)$. La ecuación es *exacta* ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} \;=\; 2y + \sin x \;=\; \frac{\partial N}{\partial x}\,.$$

Como consecuencia, existe una función $\psi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \;=\; M(x,y) \;=\; y^2 + y\,\sin x\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \;=\; N(x,y) \;=\; 2xy - \cos x - \frac{1}{1+y^2}\,. \tag{2}$$

Por tanto, integrando (9) respecto a x da $\psi(x,y) = xy^2 - y\cos x + h(y)$, donde $h(y)$ es una función a determinar. Igualando la derivada con respecto a y de la expresión previa con (10) se obtiene

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \;=\; 2xy - \cos x + \frac{dh}{dy} \;=\; 2xy - \cos x - \frac{1}{1+y^2}\,,$$

por consiguiente

$$\frac{dh}{dy} \;=\; -\frac{1}{1+y^2} \qquad \Longrightarrow \qquad h(y) \;=\; -\arctan y + k\,, \quad k \in \mathbb{R}\,.$$

Usando una de las posibles expresiones de $h(y)$ obtenida para $k = 0$, la solución general se puede escribir en la forma

$$\psi(x,y) \;=\; c \qquad \Longleftrightarrow \qquad xy^2 - y\cos x - \arctan y \;=\; c\,,$$

donde c es una constante arbitraria. Podemos calcular dicha constante imponiendo la condición inicial $y(\alpha) = 1$, esto da $c = \alpha - \cos\alpha - \pi/4$. Por tanto, la solución de la ecuación diferencial es

$$\boxed{xy^2 - y\cos x - \arctan y \;=\; \alpha - \cos\alpha - \frac{\pi}{4}}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Cuestión 4 Dada la ecuación diferencial

$$\left(\,\sin^2 x + 4xye^{xy^2} - x\,\right) y' + 2y\sin x\cos x + 2y^2e^{xy^2} - y \;=\; 0\,.$$

se pide:

(i) Clasificar la ecuación, razonando la respuesta.

(ii) Hallar la solución general de la ecuación.

SOLUCIÓN:

(i) Sea $M(x,y) \,=\, 2y\sin x\cos x + 2y^2 e^{\,xy^2} - y$ y $N(x,y) \,=\, \sin^2 x + 4xye^{\,xy^2} - x$. La ecuación es, no lineal, de primer orden **exacta** ya que se verifica:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \,=\, 2\sin x\cos x - 1 + 4xy^3 e^{\,xy^2} + 4ye^{\,xy^2} \,=\, \frac{\partial N}{\partial x}\,.$$

(ii) Como consecuencia del apartado (i), existe una función $\psi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \,=\, M(x,y) \,=\, 2y\sin x\cos x + 2y^2 e^{\,xy^2} - y\,, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \,=\, N(x,y) \,=\, \sin^2 x + 4xye^{\,xy^2} - x\,. \qquad (4)$$

Ahora, integrando (9) respecto a x, se obtiene $\psi(x,y) = y\sin^2 x - xy + 2e^{\,xy^2} + g(y)$, donde $g(y)$ es una función a determinar. Entonces, igualando la derivada respecto a y de la expresión anterior con (10)

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \,=\, \sin^2 x + 4xye^{\,xy^2} - x + \frac{dg}{dy} \,=\, \sin^2 x + 4xye^{\,xy^2} - x\,,$$

por tanto,

$$\frac{dg}{dy} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad g(y) \,=\, \alpha\,, \quad \alpha\in\mathbb{R}\,.$$

Tomando la constante $\alpha = 0$, finalmente la solución general de la ecuación se puede escribir como

$$\psi(x,y) \,=\, c \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{y\sin^2 x - xy + 2e^{\,xy^2} \,=\, c}\,,$$

donde c es una constante arbitraria.