uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Cálculo Diferencial Aplicado

Autoevaluación: Test 2

Autores:
Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin y Rocio Vega

---

Cuestión 1 Hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' - 4y' + 13y = e^x \sin(3x)\,.$$

SOLUCIÓN:
Se trata de una EDO lineal de segundo orden con coeficientes constantes, no homogénea. Resolveremos la ecuación por el método de los coeficientes indeterminados.
Si resolvemos la ecuación homogénea asociada a la ecuación diferencial obtenemos la solución

$$y_h(x) = e^{2x}(C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x))\,.$$

Fijándonos en el término independiente de la ecuación diferencial, obtenemos una solución particular

$$y_p(x) = e^x(A \sin(3x) + B \cos(3x))$$

donde hay que determinar los coeficientes A y B.

$$\left\{\begin{array}{rrcllcl} & -4y_p'(x) & = & e^x(& -4(A-3B)\sin(3x) & - & 4(3A+B)\cos(3x)) \\ + & y_p''(x) & = & e^x(& (-8A-6B)\sin(3x) & + & (6A-8B)\cos(3x)) \\ + & 13y_p(x) & = & e^x(& 13A\sin(3x) & + & 13B\cos(3x)) \end{array}\right.$$

$$y_p''(x) - 4y_p'(x) + 13y_p(x) = e^x((A+6B)\sin(3x) + (-6A+B)\cos(3x))$$

Igualando al término $e^x \sin(3x)$, obtenemos el sistema algebraico

$$\left.\begin{array}{rcl} A+6B & = & 1 \\ -6A+B & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{37}\,, B = \frac{6}{37}$$

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{2x}(C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)) + e^x\left(\frac{1}{37}\sin(3x) + \frac{6}{37}\cos(3x)\right)$$

Cuestión 2 Considerar la ecuación diferencial de segundo orden

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 6\,(\ln x)^2 \quad \text{for } x > 0\,.$$

i) Aplicar un cambio de variable que transforme la ecuación en otra con coeficientes constantes.

ii) Resolver la ecuación obtenida en i) usando un método apropiado.

SOLUCIÓN:

i) La ecuación diferencial del enunciado es de tipo *Cauchy-Euler*, por tanto aplicando el cambio de variable $x = e^{\,t}$, dicha ecuación se transforma en

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) \;=\; 6\,t^2\,,$$

que es de coeficientes constantes.

ii) La ecuación característica de la ecuación homogénea asociada con la ecuación del apartado i) tiene dos raíces, $r_1 = 2$ y $r_2 = 3$. Por tanto, su solución general es

$$y_h(t) = c_1e^{\,2t} + c_2e^{\,3t}\,,$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes arbitrarias. Podemos hallar una solución particular de la ecuación no homogénea con la forma $y_p(t) = At^2 + Bt + C$, donde $A = 1$, $B = 5/3$, y $C = 19/18$ (usando el método de los coeficientes indeterminados). Por consiguiente, la solución general de la ecuación del apartado i) es

$$y(t) = c_1e^{\,2t} + c_2e^{\,3t} + t^2 + \frac{5}{3}\,t + \frac{19}{18}\,.$$

Finalmente, deshaciendo el cambio de variable en términos de x, obtenemos la solución general de la ecuación diferencial dada.

$$\boxed{y(x) = c_1x^2 + c_2x^3 + (\ln x)^2 + \frac{5}{3}\,\ln x + \frac{19}{18}}\,.$$

Cuestión 3 Resolver la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + 3y' + 2y \;=\; \sin(e^{\,x})$$

y comprobar el resultado obtenido.

SOLUCIÓN:
La ecuación característica de la ecuación homegénea asociada tiene dos raíces, $r_1 = -1$ y $r_2 = -2$. Por tanto, su solución general es

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}\,,$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes arbitrarias. Una solución particular de la ecuación no homogénea puede ser hallada por el método de variación de los parámetros tal como sigue:

$$y_p(x) = u_1(x)\, e^{-x} + u_2(x)\, e^{-2x}\,,$$

donde u_1 y u_2 son dos funciones a determinar. Sabemos que sus derivadas satisfacen el sistema

$$\begin{cases} u_1'\, e^{-x} + u_2'\, e^{-2x} \;=\; 0 \\ -u_1'\, e^{-x} - 2\, u_2'\, e^{-2x} \;=\; \sin(e^{\,x})\,, \end{cases}$$

resolviendio obtenemos

$$\begin{cases} u_1' \;=\; e^{\,x}\, \sin(e^{\,x}) \\ u_2' \;=\; -e^{\,2x}\, \sin(e^{\,x})\,. \end{cases}$$

por tanto, integrando se tiene que

$$\begin{cases} u_1 \;=\; -\cos(e^{\,x}) \\ u_2 \;=\; e^{\,x}\, \cos(e^{\,x}) - \sin(e^{\,x})\,, \end{cases}$$

donde u_2 se obtiene integrando por partes. Finalmente, la solución general de la ecuación es

$$\boxed{y(x) \;=\; y_h(x) + y_p(x) \;=\; c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} - e^{-2x}\, \sin(e^{\,x})}\,,$$

Para comprobar su validez, basta sustituir en la ecuación original y comprobar que se satisface idénticamente.

Cuestión 4 Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando el método de variación de los parámetros

$$y'' - 2y' + 2y = e^t\,; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1\,,$$

SOLUCIÓN:

Se trata de una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes. Su solución general es de la forma $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, donde y_h es la solución general de la ecuación homogénea, $y''-2y'+2y = 0$, e y_p es una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.

Cálculo de $y_h(x)$:
La ecuación característica, $r^2-r+2 = 0$, tiene por soluciones, $r = 1\pm i$ raíces complejas conjugadas, por tanto un conjunto fundamental de soluciones es de la forma

$$\mathcal{B} = \{y_1(t), y_2(t)\} = \{e^t\cos(t), e^t\sin(t)\}$$

Concluimos que

$$y_h(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = c_1e^t\cos(t) + c_2e^t\sin(t)\,,$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes reales.

Cálculo de $y_p(x)$:
Siguiendo el enunciado del problema, vamos a hallar una solución particular mediante el método de variación de los parámetros. Proponemos una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)\,,$$

donde las funciones u_1 y u_2 se obtienen resolviendo el sistema

$$\begin{cases} u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) = 0 \\ u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = e^t \end{cases}$$

Por tanto,

$$u_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(t) \\ e^t & y_2'(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} = -\sin(t) \Longrightarrow u_1(t) = \cos(t)\,; \quad u_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & 0 \\ y_1'(t) & e^t \end{vmatrix}}{e^{2t}} = \cos(t) \Longrightarrow u_2(t) = \sin(t),$$

La solución general de la ecuación es:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1e^t\cos(t) + c_2e^t\sin(t) + e^t$$

Ahora calculamos las constantes c_1 y c_2 imponiendo las condiciones iniciales, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$, y se obtiene: $c_1 = -1\,; c_2 = 1$. Finalmente, la solución pedida es

$$\boxed{y(t) = e^t(\sin(t) - \cos(t) + 1)}$$