# Cálculo Diferencial Aplicado

**Autoevaluación: Test 3**

**Autores:**
**Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin y Rocio Vega**

---

**Cuestión 1** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{X}$$

**SOLUCIÓN:**
Los valores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$, y los vectores propios correspondientes $v_1 = (1\,,\,1\,,1)^T$, $v_2 = (1\,,\,-1\,,1)^T$, $v_3 = (1\,,\,2\,,4)^T$.
Por lo tanto, un conjunto fundamental de soluciones es

$$\vec{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \quad , \quad \vec{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \quad , \quad \vec{X}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2t} \,,$$

donde el wronskiano es $W = -6e^{2t} \neq 0$, $\forall t$ .
La solución general viene dada por

$$\vec{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2t} \,.$$

---

**Cuestión 2** i) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$X' = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} X \, ; \quad \text{siendo} \quad X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

ii) Comprobar la solución del sistema obtenida en el apartado anterior.

**SOLUCIÓN:**

i) Para resolver el sistema calculamos los valores propios de la matriz de los coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Los valores propios son: $r_1 = 2 + i3$ , y $r_2 = 2 - i3$. Los vectores propios asociados a estos valores propios son: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 - i3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 + i3 \\ 5 \end{pmatrix}$, respectivamente.
Tomando $r_1$ y $\vec{v}_1$, la solución del sistema es:

$$X(t) = c_1 \mathrm{Re} \left\{ \begin{pmatrix} 4 - i3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{(2+i3)t} \right\} + c_2 \,\mathrm{Im} \left\{ \begin{pmatrix} 4 - i3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{(2+i3)t} \right\} \, , \ \text{con } c_1, \, c_2 \in \mathbb{R} \, ,$$

por tanto:

$$\boxed{X(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 4\cos(3t) + 3\sin(3t) \\ 5\cos(3t) \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -3\cos(3t) + 4\sin(3t) \\ 5\sin(3t) \end{pmatrix} \, , \ \text{con } c_1, \, c_2 \in \mathbb{R} \, ,}$$

ii) Para comprobar la solución obtenida en el apartado anterior, veamos que se verifica $X' = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} X$ . En efecto

$$X'(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 17\cos(3t) - 6\sin(3t) \\ 10\cos(3t) - 15\sin(3t) \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 6\cos(3t) + 17\sin(3t) \\ 10\sin(3t) + 15\cos(3t) \end{pmatrix} \, ,$$

Por otro lado

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2x_1 + 5x_2 \\ -5x_1 + 6x_2 \end{pmatrix} =$$

$$c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -8\cos(3t) - 6\sin(3t) \\ -20\cos(3t) - 15\sin(3t) \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 6\cos(3t) - 8\sin(3t) \\ 15\cos(3t) - 20\sin(3t) \end{pmatrix} +$$

$$c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 25\cos(3t) \\ 30\cos(3t) \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 25\sin(3t) \\ 30\sin(3t) \end{pmatrix} = X'(t)$$

---

**Cuestión 3** i) Demostrar que ecuación diferencial ordinaria $y'' - 6y' + 13y = 0$ es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -13 & 6 \end{pmatrix} X\,; \quad \text{siendo} \quad X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

ii) Resolver el sistema del apartado anterior sabiendo que:

$$X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**SOLUCIÓN:**

i) Transformamos la ecuación diferencial mediante el siguiente cambio de variables:

$$y(t) = x_1(t)\,, \quad y'(t) = x_2(t)$$

Por tanto, $x_1' = y' = x_2$ y $x_2' = y'' = -13y + 6y' = -13x_1 + 6x_2$
Escribiendo estos resultados en forma matricial se obtiene el sistema escrito en el enunciado de este apartado.

ii) Para resolver el sistema calculamos los valores propios de la matriz de los coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -13 & 6 \end{pmatrix}$$

Los valores propios son: $r_1 = 3 + i2$ , y $r_2 = 3 - i2$. Los vectores propios asociados a estos valores propios son: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 - i2 \\ 13 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 + i2 \\ 13 \end{pmatrix}$, respectivamente.
Tomando $r_1$ y $\vec{v}_1$, la solución del sistema es:

$$X(t) = c_1 \mathrm{Re}\left\{ \begin{pmatrix} 3 - i2 \\ 13 \end{pmatrix} e^{(3+i2)t} \right\} + c_2\, \mathrm{Im}\left\{ \begin{pmatrix} 3 - i2 \\ 13 \end{pmatrix} e^{(3+i2)t} \right\}\ , \ \text{con } c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}\,,$$

por tanto:

$$X = e^{3t} \begin{pmatrix} (3c_1 - 2c_2)\cos(2t) + (2c_1 + 3c_2)\sin(2t) \\ 13c_1 \cos(2t) + 13c_2 \sin(2t) \end{pmatrix}$$

Aplicado la condición inicial $X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1 - 2c_2 \\ 13c_1 \end{pmatrix}$, se tiene que

$$c_1 = 2/13\,, c_2 = -10/13$$

La solución del sistema es: $\boxed{X = e^{3t} \begin{pmatrix} -2\sin(2t) + 2\cos(2t) \\ -10\sin(2t) + 2\cos(2t) \end{pmatrix}}$

**Cuestión 4** • Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} X$$

- Halla la solución a la EDO

$$y'' - 2y' + 2y = e^{2t}$$

- Demuestra la equivalencia de la EDO homogénea asociada a la EDO de segundo orden anterior y el sistema de ecuaciones del primer apartado.

**SOLUCIÓN:**
Calcular la solución del sistema de ecuaciones diferenciales implica calcular los valores y vectores propios de la matriz de coeficientes. Por lo tanto obtenemos

$$\lambda = 1 \pm i\,, \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \mp i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Escogemos $\lambda = 1 + i$ y su vector propio asociado $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 - i \\ 2 \end{pmatrix}$. La solución al sistema será

$$\vec{X}(t) = C_1 \mathrm{Re}\left\{ \begin{pmatrix} 1 - i \\ 2 \end{pmatrix} e^{(1+i)t} \right\} + C_2 \,\mathrm{Im} \left\{ \begin{pmatrix} 1 - i \\ 2 \end{pmatrix} e^{(1+i)t} \right\}\ , \text{ con } C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}\,,$$

con lo que

$$X = C_1 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix} e^t\,,$$

donde el wronskiano es $W = 2e^{2t} \neq 0\,,\, \forall t$.

La solución a la EDO de segundo orden del segundo apartado es la suma de la solución de la EDO homogénea asociada más una solución particular de la no homogénea. De las raíces complejas de la ecuación característica asociada a $y_h$ obtenemos

$$y_h = e^t (K_1 \sin t + K_2 \cos t)$$

Utilizando el método de los coeficientes y tras unos sencillos cálculos se ve que

$$y_p(x) = \frac{1}{2} e^{2t}$$

Por la tanto la solución general será: $y = y_h + y_p = e^t (K_1 \sin t + K_2 \cos t) + \frac{1}{2} e^{2t}$ .

Para demostrar la equivalencia entre la EDO $y'' - 2y' + 2y = 0$ y el sistema de EDO's del primer apartado utilizaremos el cambio de variable $y' = z$, con lo que tendremos el siguiente sistema de EDO's:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -2y + 2z \end{cases}$$

Es inmediato ver que su equivalente matricial es el sistema de EDO's del primer apartado:

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} X \,, \quad \text{donde} \quad X = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} .$$

Se sigue que $K_1 = C_1 - C_2$ y que $K_2 = C_1 + C_2$.

---