Cálculo Diferencial Aplicado

EXAMEN FINAL 1

Autores:
Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin y Rocio Vega

---

Cuestión 1 (2 puntos) Dada la ecuación diferencial ordinaria (EDO):

$$y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$$

Se pide:

i) Hallar la solución general de la EDO.

ii) Encontrar la solución que satisface las siguientes condiciones iniciales: $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$.

SOLUCIÓN:

i) Resolvemos la ecuación homogénea. Las raíces de la ecuación característica $r^2 + 1 = 0$ son $\pm i$, por lo tanto la solución general de la ecuación homogénea es $y_h = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$
Para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea y aplicando el principio de superposición probamos con $y_p = (Ax + B)e^x + Ce^{-x}$
Obtenemos $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = 1$. Luego la solución general de la ecuación es:

$$y = y_h + y_p = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}$$

ii) Usando las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ obtenemos $c_1 = \frac{1}{2}$ y $c_2 = 2$ con lo que la solución pedida es:

$$\boxed{y = \tfrac{1}{2}\cos(x) + 2\sin(x) + \tfrac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}}$$

Cuestión 2 (2 puntos) Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \vec{X}(t)$$

siendo $t > 0$.

i) Hallar la solución general del sistema y comprobar los resultados.

ii) Analizar el comportamiento de la solución del apartado i) cuando el tiempo t tiende a infinito. ¿Puede depender dicho comportamiento de la condición inicial que se asigne al sistema?

SOLUCIÓN:

i) Resolvemos el sistema calculando los autovalores λ de la matriz de los coeficientes. Dichos autovalores son reales y repetidos: $\lambda = -2$. Un vector propio asociado es: $\vec{u} = (1, 2)^T$, donde el símbolo ^{T} indica transposición. Por tanto, la solución general del sistema viene dada por:

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} te^{-2t} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} e^{-2t} \right],$$

donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias y el vector $\vec{w} = (w_1, w_2)^T$ satisface la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ 8 & -6 - \lambda \end{pmatrix} \vec{w} = \vec{u}\,,$$

siendo λ y $\vec{u}$ como antes. Resolviendo, tenemos $\vec{w} = (1/2, 1/2)^T$. Finalmente, haciendo las derivadas pertinentes, se comprueban los resultados.

ii) Teniendo en cuenta que

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-2t} = 0\,; \quad \text{y que} \quad \lim_{t \to +\infty} te^{-2t} = 0\,;$$

podemos concluir que, independientemente de los valores que toman las constantes c_1 y c_2, el comportamiento de la solución general cuando t tiende a infinito es:

$$\lim_{t \to +\infty} \vec{X}(t) = \lim_{t \to +\infty} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dado que la condición inicial determina las constantes c_1, c_2 y que el comportamiento descrito es indepediente de ellas, concluimos que la posible condición inicial del sistema no puede afectar al comportamiento cuando t tiende a infinito.

Cuestión 3 (2 puntos) Sabiendo que $g(x) = -1 - x/2$, resolver el siguiente PVI

$$\begin{cases} -\dfrac{2y+x}{y+x}y' &= \dfrac{2y}{x^2}(1+g)\,, \quad x \geq 1\,, \\ y(1) &= 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Sustituimos $g(x)$ en el PVI y se obtiene:

$$-\frac{2y+x}{y+x}y' = \frac{2y}{x^2}(1+g) \Longrightarrow -\frac{2y+x}{y+x}y' = \frac{y}{x^2}\,(-x) \Longrightarrow \frac{-2y-x}{y+x}y' = -\frac{y}{x}$$

Se trata de una EDO de primer orden no lineal homogénea. Para resolverla aplicamos el cambio de variable $v = y/x$, con $xv' + v = y'$:

$$\frac{-2y-x}{y+x}y' = -\frac{y}{x} \Longrightarrow \frac{-\frac{2y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}y' = -\frac{y}{x} \Longrightarrow \frac{-2v-1}{v+1}(xv'+v) = -v \Longrightarrow xv' = -\frac{v^2}{2v+1} \Longrightarrow -\frac{2v+1}{v^2}v' = \frac{1}{x}$$

Resolviendo esta ecuación de variables separables, se tiene:

$$-2\ln|v| + \frac{1}{v} - \ln x = c$$

donde c es una constante arbitraria. Finalmente, deshaciendo el cambio mediante $v = \dfrac{y}{x}$ y la condición inicial $y(1) = 1$, obtenemos una expresión implícita de $y(x)$,

$$\boxed{-2\ln\left|\tfrac{y}{x}\right| + \tfrac{x}{y} - \ln x = 1}$$

Cuestión 4 (2 puntos) Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{array}{rcl} \text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} & : & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,,\ \ t > 0\,,\ \ x \in (0,\pi) \\ \text{Condiciones de Contorno (CC)} & : & u(0,t) = 0\,,\ \ u(\pi,t) = 0\,,\ \ t > 0\,, \\ \text{Condición Inicial (CI)} & : & u(x,0) = f(x)\,,\ \ x \in [0,\pi]\,. \end{array}$$

Aplicando separación de variables $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, se pide:

i) Demostrar que $T(t) = ce^{-\lambda t}$, siendo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y λ la constante de separación.

ii) Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X(0) = 0\,; X(\pi) = 0\,;$$

y hallar los valores de $\lambda > 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

iii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \sin(nx) \ ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R} \, ,$$

hallar los coeficientes $A_n \, , n \in \mathbb{N}$, sabiendo que la función del dato inicial es: $f(x) = \sin^3(x)$

Nota: Pueden ser útiles los siguientes resultados:

- Dados $L > 0$ y $m \, , n \in \mathbb{N}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 \, , & m \neq n \\ L/2 \, , & m = n \end{cases}$
- $\sin(3x) = \sin(x)(3 - 4\sin^2(x)) \, , \forall x \in \mathbb{R} \, ;$

SOLUCIÓN:

i) Al aplicar separación de variables en la EDP se obtiene: $X''T = XT' \Longrightarrow \dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$, donde λ es la constante de separación. Tomando el primer término de la igualdad $\frac{T'}{T} = -\lambda$, se obtiene la ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden $T' + \lambda T = 0$, cuya solución no nula es: $T(t) = ce^{-\lambda t}$, siendo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ constante.

ii) La segunda igualdad del método de separación de variables, $\dfrac{X''}{X} = -\lambda$, da lugar a la ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden: $X'' + \lambda X = 0$. Para obtener los valores en la frontera, debemos aplicar las CC.

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \Longrightarrow X(0) = 0 \, ; \quad \text{pues la igualdad es cierta } \forall t \text{ y } T(t) \not\equiv 0$$

$$u(\pi,t) = X(\pi)T(t) = 0 \Longrightarrow X(\pi) = 0 \, ; \quad \text{pues la igualdad es cierta } \forall t \text{ y } T(t) \not\equiv 0$$

Para hallar las soluciones no nulas cuando $\lambda > 0$, tomamos $\lambda = a^2$, con $a > 0$. La ecuación característica es: $r^2 + a^2 = 0 \Longrightarrow r = \pm ia \, , i \in \mathbb{C}$, por tanto

$$X(x) = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax) \, ; \qquad c_1 \in \mathbb{R} \, , c_2 \in \mathbb{R} \, .$$

Aplicado las CC: $X(0) = 0 \Longrightarrow c_1 = 0$; $X(\pi) = 0 \Longrightarrow c_2 \sin(a\pi) = 0$, imponiendo que $c_2 \neq 0$, se tiene: $\sin(a\pi) = 0 \Longrightarrow a\pi = n\pi \Longrightarrow a = n \, , n = 1, 2, 3, \cdots$ Por tanto $\boxed{\lambda = n^2 \, ; \, n = 1, 2, 3, \cdots}$

iii) Aplicando la CI se tiene que:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) = f(x) = \sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$$

donde hemos usado la segunda parte de la nota del enunciado del problema. Identificando términos de la serie con el lado derecho de la igualdad, concluimos que:

$$\boxed{A_1 = \tfrac{3}{4} \, ; \qquad A_2 = 0 \, ; \qquad A_3 = -\tfrac{1}{4} \, ; \qquad A_n = 0 \, , \forall n \geq 4}$$

Otra forma mucho más larga de resolver este apartado consiste en hallar los coeficientes mediante la fórmula $A_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$, que se obtiene usando la primera parte de la nota del enunciado, tomando $L = \pi$.

Cuestión 5 (2 puntos) Sea el problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' &= 1 + \dfrac{y}{2}\,, \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

al que se le aplica el siguiente esquema numérico (Euler mejorado):

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}(\, f(t_n, Y_n) + f(t_{n+1}, Y_n + hf(t_n, Y_n))\,)$$

i) Calcular, usando los pasos $h_1 = 0.2$ y $h_2 = 0.1$, las soluciones aproximadas $Y^{h_1}_{t=0.4}$, $Y^{h_2}_{t=0.4}$ de $y(0.4)$.

ii) Estimar el orden del método a partir de los resultados anteriores, sabiendo que la solución exacta del PVI es: $y(t) = 2(e^{t/2} - 1)$.

SOLUCIÓN:

i) Del esquema numérico $Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}(\, f(t_n, Y_n) + f(t_n, Y_n + hf(t_n, Y_n))\,)$ y de la EDO del PVI obtenemos que $Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}\left(1 + \frac{Y_n}{2} + 1 + \frac{1}{2}\left(Y_n + h(1 + \frac{Y_n}{2})\right)\right)$, con lo que $Y_{n+1} = Y_n + h\left(1 + \frac{Y_n}{2}\right) + \frac{h^2}{4}\left(1 + \frac{Y_n}{2}\right)$.
De la condición inicial obtenemos que $Y_0 = 0$.
Para el paso $h = 0.2$ obtenemos $Y_1^{h_1} = 0.21$, $Y_2^{h_1} = 0.44205$.
Para el paso $h = 0.1$ obtenemos $Y_1^{h_2} = 0.1025$, $Y_2^{h_2} = 0.21025$, $Y_3^{h_2} = 0.32353$, $Y_4^{h_2} = 0.44261$.

ii) Calculamos $E^{h_1}_{t=0.4} = \left|Y^{h_1}_{t=0.4} - y(0.4)\right| = 7.55516 \times 10^{-4}$ y $E^{h_2}_{t=0.4} = \left|Y^{h_2}_{t=0.4} - y(0.4)\right| = 1.96078 \times 10{-}4$. Entre los pasos h_1 y h_2 hay un factor de reducción $q = 2$. Entonces tenemos que

$$E^{h_2}_{t=0.4} \approx Ch_2^p = C\left(\frac{h_1}{2}\right)^p \approx \frac{E^{h_1}_{t=0.4}}{2^p}$$

donde p es el orden del método. Aplicando logaritmos obtenemos que $p \approx 1.92$, con lo que la estimación del orden del método es $p = 2$.