Cálculo Diferencial Aplicado

EXAMEN FINAL 2

Autores:
Manuel Carretero, Luis L. Bonilla, Filippo Terragni, Sergei Iakunin y Rocio Vega

---

Cuestión 1 (2 puntos) Dada la ecuación diferencial $x^2y'' - 3xy' + 4y = \ln x \quad x > 0,$ se pide:

i) Efectuar el cambio de variable adecuado que permite transformarla en una ecuación diferencial con coeficientes constantes.

ii) Resolver la ecuación diferencial así obtenida sujeta a las condiciones $y(1) = \frac{1}{2}$, $y'(1) = 1$.

SOLUCIÓN:

i) Aplicando el cambio de variable independiente $x = e^t$, la ecuación diferencial se transforma en

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = t$$

ii) La anterior EDO es una ecuación de segundo orden con coeficientes constantes. Resolviendo la ecuación homogénea, la correspondiente ecuación característica tiene una única raíz $r = 2$, por lo tanto la solución es:

$$y_h = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$$

Para la solución particular de la ecuación no homogénea $y_p = At + B$ se obtiene $A = \frac{1}{4}$ y $B = \frac{1}{4}$. Por lo tanto la solución general de la ecuación anterior es

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + \frac{1}{4}(t + 1)\,.$$

Deshaciendo el cambio de variable efectuado se obtiene la solución general de la ecuación diferencial del enunciado:

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x + \frac{1}{4}(\ln x + 1)\,.$$

Usando las condiciones iniciales $\quad y(1) = \dfrac{1}{2}, \quad y'(1) = 1 \quad$ obtenemos $c_1 = \dfrac{1}{4}$ y $c_2 = \dfrac{1}{4}$ con lo que la solución es:

$$y(x) = \frac{1}{4}(x^2 + x^2 \ln x + \ln x + 1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(x) = 1/4(x^2+1)(\ln x + 1)}$$

Cuestión 2 (2 puntos) Considera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{pmatrix} X_1'(t) \\ X_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

i) Encuentra el valor de α para el cual el comportamiento cualitativo de las soluciones del sistema cambia (*sugerencia*: calcula los valores propios de la matriz de coeficientes en términos de α). Justifica tu respuesta.

ii) Halla la solución del sistema cuando $\alpha = 1$ y $(X_1(0), X_2(0)) = (1, 0)$. Además, calcula la distancia $d(t)$ desde la posición $(0,0)$ hasta la posición de la partícula que esté moviéndose acorde a la solución calculada (*sugerencia*: utiliza la fórmula $d(t) = \sqrt{X_1(t)^2 + X_2(t)^2}$).

SOLUCIÓN:

i) Los valores propios de la matriz de coeficientes son

$$r_1 \;=\; \sqrt{4 - 5\alpha}\;, \qquad r_2 \;=\; -\sqrt{4-5\alpha}\;.$$

Si $\alpha < 4/5$ los valores propios son reales con signos opuestos, por tanto las soluciones del sistema vienen dadas por combinaciones de funciones exponenciales.

Por otra parte, si $\alpha > 4/5$ los valores propios son complejos imaginarios puros conjugados, por lo que las soluciones son periódicas.

Por tanto el comportamiento cualitativo de las soluciones cambia para $\boxed{\alpha = 4/5}$

ii) Para $\alpha = 1$ los valores propios y los vectores propios asociados a la matriz de coeficientes son

$$r_1 \;=\; i \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{u}_1 \;=\; \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r_2 \;=\; -i \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{u}_2 \;=\; \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La solución real del sistema es

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2\sin t + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

donde c_1, c_2 son dos constantes arbitrarias. Si la partícula se mueve comenzando en el punto $(1,0)$ en $t=0$, entonces las constantes c_1 y c_2 satisfacen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con lo que $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$. La distancia requerida está dada por

$$\boxed{d(t) = \sqrt{X_1(t)^2 + X_2(t)^2} = \sqrt{4\sin^2 t + 4\sin t\cos t + 1}}$$

Cuestión 3 (2 puntos) Resuelve el siguiente PVI

$$\begin{cases} x^2 + e^y + (xe^y + \cos y)y' &= 0 \\ y(0) &= g(\pi/2) \end{cases}$$

sabiendo que la función g cumple

$$g'(x) = \sin(x)\,, \quad g(0) = -1\,.$$

SOLUCIÓN:

Es inmediato ver que $g(x) = -\cos(x)$, con lo que $g(\pi/2) = 0 = y(0)$.

Por otra parte, la ecuación diferencial del PVI es exacta. Por lo tanto existe una función $F(x, y(x))$ tal que $\dfrac{\partial F}{\partial x} = x^2 + e^y$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = xe^y + \cos y$, donde

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0\,.$$

Obtenemos la función F integrando $\dfrac{\partial F}{\partial x}$:

$$F = \int \left(x^2 + e^y\right) dx = \frac{x^3}{3} + xe^y + \phi(y)\,.$$

Para obtener el valor de la función $\phi(y)$ derivamos el anterior resultado respecto de y y lo igualamos a $\dfrac{\partial F}{\partial y} = xe^y + \cos y$, con lo que obtenemos la ecuación diferencial $\phi'(y) = \cos y$ y así $\phi(y) = \sin y$ (tomando igual a cero la constante de integración). Por lo tanto

$$F = \frac{x^3}{3} + xe^y + \sin y$$

De $\dfrac{dF}{dx} = 0$ concluimos que $\frac{x^3}{3} + xe^y + \sin y = C$ Teniendo en cuenta que $y(0) = 0$ se obtiene que $C = 0$. Por tanto, la solución es:

$$\boxed{\tfrac{x^3}{3} + xe^y + \sin y = 0}$$

Cuestión 4 (2 puntos) Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{aligned}
\text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \ \ t>0\,, \ \ x \in (0,\pi/3) \\
\text{Condiciones de Contorno (CC)} &: \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0\,, \ \ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi/3,t) = 0\,, \ \ t>0\,, \\
\text{Condición Inicial (CI)} &: \quad u(x,0) = f(x)\,, \ \ x \in [0,\pi/3]\,.
\end{aligned}$$

Aplicando separación de variables $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, se pide:

i) Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X'(0) = 0\,;\, X'(\pi/3) = 0\,;$$

y hallar los valores de la constante de separación $\lambda \geq 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

ii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-9n^2 t} \cos(3nx)\ ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,,$$

hallar el valor aproximado de $u(\pi/6, 1/9)$, tomando solamente los tres primeros sumandos de la serie anterior, sabiendo que la función del dato inicial es: $f(x) = 2x+1$

Nota: Puede ser útil el siguiente resultado:

- Dados $L>0$ y $m\,,n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,;\ m\neq n \\ L/2\,;\ m=n\neq 0 \\ L\,;\ m=n=0 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

i) Al aplicar separación de variables, se obtiene que: $\dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$, siendo λ la constante de separación. Por tanto: $X'' + \lambda X = 0$. Para obtener los valores en la frontera, debemos aplicar las CC.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = X'(0)T(t) = 0 \Longrightarrow X'(0) = 0\,; \quad \text{pues la igualdad es cierta } \forall t \text{ y } T(t)\not\equiv 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\pi/3,t) = X'(\pi/3)T(t) = 0 \Longrightarrow X'(\pi/3) = 0\,; \quad \text{pues la igualdad es cierta } \forall t \text{ y } T(t)\not\equiv 0$$

Para hallar las soluciones no nulas distinguimos dos casos:
Caso 1: $\lambda = 0$
$X'' = 0 \implies X(x) = c_1 x + c_2\,;\ c_1 \in \mathbb{R}\,, c_2 \in \mathbb{R}$. Dado que $X'(x) = c_1$, se tiene que $X'(0) = 0 = c_1 = X'(\pi/3)$, por tanto cuando $\boxed{\lambda = 0}$, se obtiene que $X(x) = c_2 \neq 0$ es solución no nula del problema.
Caso 2: $\lambda > 0$

Tomamos $\lambda = a^2$, con $a > 0$. La ecuación característica es: $r^2 + a^2 = 0 \Longrightarrow r = \pm ia\,, i \in \mathbb{C}$, por tanto

$X(x) = c_1\cos(ax) + c_2\sin(ax)$; además $X'(x) = -ac_1\sin(ax) + ac_2\cos(ax)$, con $c_1 \in \mathbb{R}\,, c_2 \in \mathbb{R}$.

Aplicado las CC: $X'(0) = 0 \Longrightarrow c_2 = 0$; $\quad X'(\pi/3) = 0 \Longrightarrow -ac_1\sin(a\pi/3) = 0$, imponiendo que $c_1 \neq 0$, se tiene: $\sin(a\pi/3) = 0 \Longrightarrow a\pi/3 = n\pi \Longrightarrow a = 3n\,, n = 1, 2, 3, \cdots$ Por tanto $\boxed{\lambda = (3n)^2 = 9n^2\,;\, n = 1, 2, 3, \cdots}$

ii) Debemos calcular:

$$u(\pi/6, 1/9) \approx A_0 + A_1 e^{-1}\cos(\pi/2) + A_2 e^{-4}\cos(\pi) = A_0 - \frac{A_2}{e^4}$$

Para calcular los coeficientes A_0 y A_2, aplicamos la CI y se tiene:

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(3nx) = f(x) = 2x + 1$$

Usando las condiciones de ortogonalidad de la nota del enunciado, sabemos que los coeficientes A_n verifican:

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi/3}(2x+1)dx = 1 + \pi/3$$

$$(n \geq 1)\,, A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(3nx)dx = \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/3}(2x+1)\cos(3nx)dx \Longrightarrow$$

$$A_2 = \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/3}(2x+1)\cos(6x)dx = \frac{1}{\pi}\left[(2x+1)\sin(6x) + \frac{1}{3}\cos(6x)\right|_0^{\pi/3} = 0$$

La aproximación pedida es: $\boxed{u(\pi/6, 1/9) \approx 1 + \frac{\pi}{3}}$

Cuestión 5 (2 puntos) Se quiere resolver numéricamente el siguiente PVI

$$\begin{cases} y' &= t + \dfrac{y}{2} + 1\,, \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

mediante el esquema numérico de Adams-Bashforth:

$$Y_{n+2} = Y_{n+1} + \frac{3}{2}hf(t_{n+1}, Y_{n+1}) - \frac{1}{2}hf(t_n, Y_n)$$

i) Calcula con paso $h_1 = 0.1$ la solución aproximada $Y^{h_1}_{t=0.3}$ de $y(0.3)$, sabiendo que Y_1 debe calcularse mediante el método de Euler explícito.

ii) Usando el paso $h_2 = 0.01$ se obtiene la aproximación $Y^{h_2}_{t=0.3} = 1.5327258$. Estima el orden del método a partir de $Y^{h_1}_{t=0.3}$, $Y^{h_2}_{t=0.3}$ y la solución exacta $y(t) = 7e^{t/2} - 2(t+3)$.

SOLUCIÓN:

i) De la condición inicial obtenemos que $Y_0 = 1$. Del esquema de Euler explícito obtenemos: $Y_1^{h_1} = 1.15$.
Las siguientes dos aproximaciones se obtienen del método de Adams-Bashforth:
$Y_2^{h_1} = 1.32625$, $\boxed{Y_3^{h_1} = 1.52197}$.

ii) Calculamos:
$E_{t=0.3}^{h_1} = \left|Y_{t=0.3}^{h_1} - y(0.3)\right| = 0.01087094$ y $E_{t=0.3}^{h_2} = \left|Y_{t=0.3}^{h_2} - y(0.3)\right| = 0.00011382.$
Entre los pasos h_1 y h_2 hay un factor de reducción $q = 10$. Entonces tenemos que

$$E_{t=0.3}^{h_2} \approx Ch_2^p = C\left(\frac{h_1}{10}\right)^p \approx \frac{E_{t=0.3}^{h_1}}{10^p}$$

donde p es el orden del método. Aplicando logaritmos obtenemos que $p \approx 1.98$, con lo que la estimación del orden del método es $\boxed{p = 2}$.
