uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

CÁLCULO

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Índice general

Capítulo 1

Conjuntos de números

1.1. Números naturales

El conjunto ordenado de los números naturales se nombra con la letra $\mathbb{N}$, tiene infinitos elementos y se suele representar como $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Aquí las llaves indican que es un conjunto, del que se muestran los tres primeros elementos, y los puntos suspensivos representan los infinitos números naturales que, por razones obvias, no se pueden escribir en su totalidad.

Siempre que se suman o multiplican dos números naturales el resultado que se obtiene es otro número natural. Decimos entonces que las operaciones suma $(+)$ y producto $(*)$ son operaciones *internas* en $\mathbb{N}$. Sin embargo, las operaciones resta $(-)$ y división $(/)$ son operaciones *externas* en $\mathbb{N}$, ya que cuando se restan o dividen dos números naturales el resultado de la operación no tiene por qué ser un número natural. Por ejemplo, $3 - 5 \notin \mathbb{N}$ y $3/5 \notin \mathbb{N}$.

Los números naturales se usan frecuentemente en problemas en los que hay que contar o enumerar objetos. Para facilitar esta labor, se definen a continuación el *factorial* y el *número combinatorio*.

Definición 1 *Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, su factorial es*

$$n! = n(n-1)(n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 .$$

Por convenio, $0! = 1$.

Ejemplos. $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$; $\quad 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$; $\quad n! = n(n-1)!$.

El factorial es útil a la hora de ordenar elementos de un conjunto. Si tenemos n elementos distintos y queremos saber de cuántas maneras distintas es posible ordenarlos (*permutaciones*), la respuesta es $n!$. Por ejemplo, si tres amigos quieren sentarse en un sofá que tiene tres asientos, pueden hacerlo de $3! = 6$ formas distintas, esto es $3!$ indica el número máximo de permutaciones diferentes de los tres amigos a la hora de sentarse.

Definición 2 *Dados m, $n \in \mathbb{N}$, con $m \geq n$, el número combinatorio (o coeficiente binomial) se define*

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}\,.$$

Además, en el caso $n = 0$, se tiene que $\binom{m}{0} = 1$.

Ejemplo. $\binom{5}{2} = \dfrac{5!}{2!\,3!} = \dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10\,.$

El número combinatorio también tiene un significado a la hora de contar. Concretamente, si tenemos un conjunto con m elementos y queremos saber cuántos subconjuntos distintos de $n \leq m$ elementos podemos formar a partir de ellos (*combinaciones de orden n*), la respuesta es $\binom{m}{n}$. Por ejemplo, el número de parejas de baile distintas que pueden formar tres amigos es $\binom{3}{2} = 3$.

Por otro lado, los números naturales serán particularmente útiles en el desarrollo del Capítulo 2. Para facilitar la comprensión de los contenidos, vamos a explicar una técnica que sirve para demostrar propiedades que dependen de números naturales, conocida con el nombre de *principio de inducción*.

El principio de inducción establece lo siguiente. Si

(i) comprobamos que el número natural $n = 1$ verifica la propiedad $\mathcal{P}$;

(ii) suponemos que el número natural $n = k$ verifica la propiedad $\mathcal{P}$ (hipótesis de inducción);

(iii) demostramos que el número natural $n = k + 1$ verifica la propiedad $\mathcal{P}$;

entonces todos los números naturales verifican la propiedad $\mathcal{P}$. Esto es, $\mathcal{P}$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

En la práctica, cuando apliquemos el principio de inducción, seguiremos este orden: probaremos (i), daremos por supuesta la hipótesis de inducción (ii) y deberemos demostrar, a partir de ella, (iii).

NOTA. En general, en (i) debemos demostrar que la propiedad se cumple para el número natural más pequeño que de sentido a $\mathcal{P}$. Por ejemplo, si en (i) demostramos que $\mathcal{P}$ se verifica para $n = 3$ y seguimos con los pasos (ii) y (iii), entonces concluiremos que la propiedad deseada es cierta para todos los números naturales mayores o iguales que 3.

Ejemplo. Demostramos que la suma de los n primeros números naturales es

$$\sum_{i=1}^{n} i \;=\; 1+2+3+\ldots+n \;=\; \frac{n(n+1)}{2}\,. \tag{1.1}$$

La propiedad $\mathcal{P}$, en este caso, es la fórmula (1.1) y queremos probar que es cierta para todos los números naturales, esto es para todo $n \in \mathbb{N}$. Apliquemos el principio de inducción.

(i) El número natural $n = 1$ verifica la propiedad $\mathcal{P}$ ya que

$$\sum_{i=1}^{1} i \;=\; 1 \;=\; \frac{1(1+1)}{2}\,.$$

(ii) Supongamos que el número natural $n = k$ verifica la propiedad $\mathcal{P}$ (hipótesis de inducción), esto es asumimos que

$$\sum_{i=1}^{k} i \;=\; 1+2+3+\ldots+k \;=\; \frac{k(k+1)}{2}\,.$$

(iii) Si $n = k+1$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{k+1} i \;=\; 1+2+3+\ldots+k+(k+1) \;=\; \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\,,$$

donde en la segunda igualdad hemos aplicado la hipótesis de inducción. Por tanto la propiedad $\mathcal{P}$ se verifica también para $n = k+1$ y, gracias al principio de inducción, podemos concluir que la fórmula (1.1) es cierta para todos los números naturales.

1.2. Números enteros

El conjunto de los números enteros se nombra con la letra $\mathbb{Z}$, está formado por infinitos elementos y se describe como $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Vemos que $\mathbb{Z}$ contiene a $\mathbb{N}$ (esto es $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$); además contiene al elemento 0 y a los valores correspondientes a los números naturales con signo negativo.

Las operaciones suma $(+)$, resta $(-)$ y producto $(*)$ son internas en $\mathbb{Z}$, sin embargo la división $(/)$ es una operación externa en $\mathbb{Z}$, pues al dividir dos números enteros el resultado no tiene por qué ser entero (por ejemplo $65/10 \notin \mathbb{Z}$).

1.3. Números racionales e irracionales

El conjunto de los números racionales se nombra con la letra $\mathbb{Q}$, está formado por fracciones de números enteros y se define como $\mathbb{Q} = \{a/b\,,\ \text{con } a, b \in \mathbb{Z}\,,\ b \neq 0\}$. Obsérvese que se verifica la relación $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

En $\mathbb{Q}$ las cuatro operaciones básicas, suma $(+)$, resta $(-)$, producto $(*)$ y división $(/)$, son internas. Por tanto $\mathbb{Q}$ es un conjunto que satisface todas nuestras necesidades a la hora de realizar operaciones aritméticas. Por otro lado, un número racional se puede expresar en forma de número decimal y solamente de uno entre dos modos distintos: como (i) número decimal exacto o (ii) número decimal periódico.

Ejemplos.

- $\dfrac{3}{2} = 1,5$ es un número decimal exacto.
- $\dfrac{1}{3} = 0,3333333333\ldots = 0,\widehat{3}$ es un número decimal periódico puro.
- $\dfrac{11}{6} = 1,8333333333\ldots = 1,8\widehat{3}$ es un número decimal periódico mixto.

Otra propiedad importante que tiene el conjunto $\mathbb{Q}$ es que, dados dos números racionales p y q, con $p < q$, siempre existen infinitos números racionales entre ellos dos. En efecto, $r_1 = (p+q)/2$, $r_2 = (p+r_1)/2$, $r_3 = (p+r_2)/2$, ... son (infinitos) racionales que se hallan entre p y q. Por tanto decimos que $\mathbb{Q}$ es un conjunto *denso*.

También existen infinitos números que no pertenecen a $\mathbb{Q}$, esto es todos aquellos que se expresan en forma decimal con infinitas cifras decimales no periódicas. Dichos números se llaman *irracionales* (su nombre proviene de que no pueden expresarse como números racionales, esto es como cociente de dos números enteros). Denotaremos al conjunto de los números irracionales con la letra $\mathbb{I}$. Por ejemplo, π, $\sqrt{2}$, e son números irracionales.

Ejemplo. El ejemplo académico de número irracional más famoso es $\sqrt{2}$. Probemos que $\sqrt{2}$ no es racional. Para ello vamos a usar una técnica de demostración llamada *demostración por reducción al absurdo*. En este caso, el método consiste en suponer que $\sqrt{2}$ pertenece a $\mathbb{Q}$ y ver que así se llega a algo absurdo, confirmándose por tanto que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. En efecto, si $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, entonces existen dos números enteros p y q tales que $\sqrt{2} = p/q$. Además, podemos seleccionar estos números enteros de forma que la fracción p/q sea irreducible. Elevando al cuadrado se tiene que $2 = p^2/q^2$, por tanto $p^2 = 2q^2$. Así pues p^2 es par y p también es par, esto es $p = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Sustituyendo esta última relación en $p^2 = 2q^2$ obtenemos que $q^2 = 2k^2$, lo que implica que q es par y $q = 2m$ para algún $m \in \mathbb{Z}$. De esta forma, llegamos a poder escribir $\sqrt{2} = p/q = (2k)/(2m) = k/m$, algo absurdo porque habíamos supuesto que la fracción p/q es irreducible. Como consecuencia, queda demostrado que necesariamente $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, esto es $\sqrt{2}$ es un número irracional.

1.4. Números reales

El conjunto de los números reales se denota con la letra $\mathbb{R}$. Dado el carácter introductorio del capítulo, damos una definición concisa de este conjunto diciendo que $\mathbb{R}$ está constituido por la unión disjunta de dos conjuntos, el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales, esto es $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Dado que el conjunto de los números racionales contiene a los enteros, podemos concluir que $\mathbb{R}$ incluye todos los números que hemos definido hasta el momento.

Los números reales se pueden representar en la llamada *recta real* (veáse Figura 1.1) que se construye fijando la posición del número 0 (*origen*), de modo que los números reales negativos se representan a la izquierda de 0 y los números reales positivos a su derecha (el punto de vista es el del lector). Una de las propiedades fundamentales que tienen los números reales es que 'llenan toda la recta real', es decir todo número real representa un punto de la recta y viceversa. Los números racionales no tienen esta propiedad ya que, por ejemplo, la posición representada por el número irracional $\sqrt{2}$ es un 'hueco' que los números racionales no son capaces de describir.

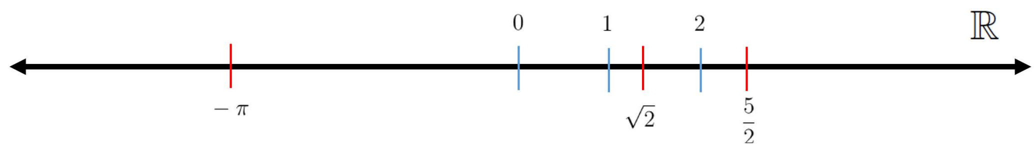

Figura 1.1: Recta real.

1.4.1. Propiedades de los números reales

Veámos ahora algunos conceptos y propiedades relevantes de $\mathbb{R}$ que serán muy útiles para desarrollar el resto del curso.

- $\mathbb{R}$ es un conjunto totalmente ordenado.

  En la recta real los números reales se representan de menor a mayor. El orden se establece a través de la relación que determinan los símbolos $<$ (menor que), $\leq$ (menor o igual que), $>$ (mayor que) y $\geq$ (mayor o igual que). Por ejemplo, $-10 < -3/2 < -1,1 < 0 < 4/3 < \sqrt{2} < e < \pi < 1000$. De forma simétrica se tiene que $1000 > \pi > e > \sqrt{2} > 4/3 > 0 > -1,1 > -3/2 > -10$. Más en general, dados dos números reales a y b, se verifica siempre una sola de estas tres relaciones: $a < b$, $a > b$, $a = b$.

- Valor absoluto de un número real.

  El valor absoluto de $x \in \mathbb{R}$ es un número real positivo que indicamos con $|x|$ y definimos como

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} -x & \text{si } \ x < 0\,, \\ 0 & \text{si } \ x = 0\,, \\ x & \text{si } \ x > 0\,. \end{cases} \tag{1.2}$$

  El valor absoluto es muy importante porque nos permite medir distancias entre números reales, es por tanto un 'metro matemático'. Concretamente, dados dos números reales x e y, la distancia entre ellos es $|x - y| = |y - x|$. En particular, el valor absoluto de cualquier número real x es la distancia de x al origen 0, ya que $|x| = |x - 0|$.

Recordamos las siguientes propiedades para todo x, $y \in \mathbb{R}$.

✓ $|x|^2 = x^2$.
✓ $|x| = |-x|$.
✓ $|xy| = |x|\,|y|$.
✓ $-|x| \leq x \leq |x|$.
✓ $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$ (para todo $a > 0$).
✓ $|x| \geq a \iff x \leq -a$ o $x \geq a$ (para todo $a > 0$).
✓ $|x+y| \leq |x| + |y|$ (desigualdad triangular).
✓ $|x| - |y| \leq |x-y| \leq |x| + |y|$.

- Intervalos de la recta real.

Entre los subconjuntos que se pueden definir en $\mathbb{R}$, los intervalos son los más utilizados. Hay intervalos de distintos tipos y se definen a continuación.

Definición 3 *Dados a, $b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, se define lo siguiente.*

✓ *Intervalo abierto:*
$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
✓ *Intervalo cerrado:*
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.
✓ *Intervalos semiabiertos:*
$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.
$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.
✓ *Intervalos infinitos:*
$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$.
$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$.
$(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$.
$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$.
$(-\infty,+\infty) \equiv \mathbb{R}$.

- Entornos de un número real.

El entorno de un número real nos da una idea del concepto de 'vecindad', esto es nos permite saber qué números reales están 'próximos' a uno dado.

Definición 4 *Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, el entorno abierto de centro x_0 y radio $\epsilon > 0$ se define $E(x_0;\epsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \epsilon\}$ (Figura 1.2).*

Claramente se tiene que $E(x_0;\epsilon) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon\} = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Por ejemplo $E(-1;3) = \{x \in \mathbb{R} : |x + 1| < 3\} = (-4, 2)$.

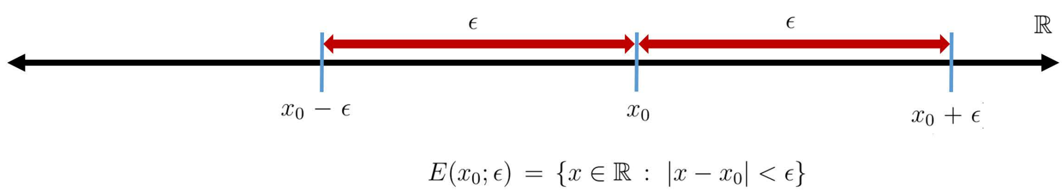

Figura 1.2: Entorno abierto de centro x_0 y radio $\epsilon > 0$.

- Conjuntos acotados, cotas, supremo e ínfimo, máximo y mínimo.

Definición 5 *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se dice que está acotado superiormente si existe un número real K tal que $x \leq K$ para todo $x \in A$. Al número K se le llama cota superior de A.*

Definición 6 *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se dice que está acotado inferiormente si existe un número real k tal que $x \geq k$ para todo $x \in A$. Al número k se le llama cota inferior de A.*

Definición 7 *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se dice que está acotado si lo está superior e inferiormente a la vez.*

Ejemplos.

El conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ está acotado inferiormente (por ejemplo 0, -1, $-\sqrt{3}$ son algunas cotas inferiores), pero no está acotado superiormente ya que coincide con el intervalo infinito $A \equiv [0, +\infty)$.

El conjunto $B = \{1/n\,,\ \text{con } n \in \mathbb{N}\}$ está acotado. Concretamente, 0 y cualquier número real negativo son cotas inferiores de B. Además, 1 y cualquier número real mayor que 1 son cotas superiores de B.

Definición 8 *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente, se llama supremo de A a la menor de todas sus cotas superiores. Si el supremo además pertenece a A, entonces se le llama máximo de A.*

Definición 9 *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ acotado inferiormente, se llama ínfimo de A a la mayor de todas sus cotas inferiores. Si el ínfimo además pertenece a A, entonces se le llama mínimo de A.*

Volviendo a los ejemplos anteriores, el ínfimo del conjunto A es 0 y, como $0 \in A$, se dice que 0 es el mínimo de A. Por otra parte, 0 es el ínfimo del conjunto B (pero no es máximo ya que $0 \notin B$) y 1 es su supremo y máximo.

- Propiedad de la mínima cota superior: *axioma del supremo.*

Definición 10 *Si $A \subset \mathbb{R}$, A no es vacío y A está acotado superiormente, entonces A tiene supremo en $\mathbb{R}$.*

Esta propiedad garantiza que los números reales 'llenan completamente la recta real'. Además, esta propiedad caracteriza al conjunto $\mathbb{R}$ frente al conjunto $\mathbb{Q}$, ya que el conjunto de los números racionales no cumple el axioma del supremo. Para demostrarlo basta con analizar el siguiente *contraejemplo.*

Sea $A \subset \mathbb{Q}$ definido como $A = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$. Claramente A es no vacío pues, por ejemplo, $q = 0 \in \mathbb{Q}$ satisface $q^2 = 0 < 2$. Por otro lado, A está acotado superiormente pues, por ejemplo, $K = 2 \in \mathbb{Q}$ es una cota superior de A (para todo $q \in A$, se tiene que $q < K = 2$ pues $q^2 < 2 < K^2 = 4$). Finalmente, a partir de la definición de A, se tiene que su supremo es el número $\sqrt{2}$ que, como probamos anteriormente, no es racional. Así pues concluimos que $\mathbb{Q}$ no cumple el axioma del supremo.

1.5. Números complejos

El conjunto de los números complejos se denota con la letra $\mathbb{C}$ y se define como $\mathbb{C} = \{a + i\,b\,,\ \text{con } a, b \in \mathbb{R}\,,\ i^2 = -1\}$. Por tanto $\mathbb{C}$ está formado por números de la forma $z = a + i\,b$, donde el número real a se llama *parte real* de z y el número real b se llama *parte imaginaria* de z. A i se le conoce con el nombre de *unidad imaginaria*, tiene la propiedad que $i^2 = -1$ y se escribe $i = \sqrt{-1}$.

El conjunto de los números complejos fue introducido para poder resolver ecuaciones algebráicas, del tipo $x^2 + 1 = 0$, que no tienen soluciones reales (notése que, en el conjunto de los números complejos, la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene solución, concrétamente tiene las dos soluciones $x = i$ y $x = -i$). Sin embargo, describir las propiedades de los números complejos queda fuera de los objetivos de este curso.