uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

CÁLCULO

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Índice general

Capítulo 2

Sucesiones y series de números reales

2.1. Sucesiones de números reales

Una sucesión $s = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{\, a_1, a_2, \dots \}$ de números reales es una aplicación que a cada número natural n le hace corresponder un único número real a_n. En otras palabras, una sucesión de números reales es una función de la forma

$$\begin{aligned} s \,:\, \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a_n \,. \end{aligned}$$

Por abuso de lenguaje, muchas veces no escribiremos el nombre de la sucesión s; en su lugar, escribiremos entre paréntesis el *término general* de la sucesión a_n, que describe cada término de la sucesión cuando n (nuestro 'índice') recorre los números naturales. Dicho 'índice' induce un orden natural entre los elementos de la sucesión. Notése que, en algunos casos, podemos tener $n \geq n_0$, con $n_0 = 0$ o n_0 igual a un número natural fijo (por ejemplo, $n_0 = 3$).

Ejemplos.

- $s_1 = \left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left\{ 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dots \right\}.$
- $s_2 = \left(\dfrac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} = \left\{ 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dots \right\}.$
- $s_3 = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = \{\, -1, +1, -1, +1, \dots \}\,.$

A continuación estudiaremos tres propiedades importantes de una sucesión de números reales: convergencia, acotación y monotonía.

Decimos que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende hacia (*converge* a, tiene como límite) un número real a, cuando n es arbitrariamente grande, y lo denotamos mediante

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{o} \quad a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a\,,$$

si cualquier entorno de a contiene prácticamente todos los términos de la sucesión (todos menos un número finito). En caso contrario, decimos que la sucesión *diverge*. Con más precisión, usamos la siguiente definición.

Definición 11 *Decimos que* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ *tal que, si* $n > N_\epsilon$ *, entonces* $|a_n - a| < \epsilon$ *.*

Notése que, si existe, el límite de una sucesión es único. En general, los cálculos con ϵ y N_ϵ son bastante complicados, así que en la práctica casi siempre nos apoyaremos en teoremas que nos evitarán tener que encontrar un N_ϵ para cada ϵ. Sin embargo, es ilustrativo entender cómo funciona la definición en ejemplos sencillos.

Ejemplo. Demostremos que

$$a_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 = a\,.$$

Fijado $\epsilon > 0$ arbitrario, debemos ser capaces de encontrar $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que, si $n > N_\epsilon$, entonces

$$|a_n - a| \;=\; \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon\,.$$

En este caso resulta sencillo, porque basta darse cuenta de que

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon \iff \frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}$$

y considerar N_ϵ igual al menor número entero igual o mayor que $1/\epsilon$. Por ejemplo, si $\epsilon = 0{,}001$, podemos tomar $N_{0{,}001} = 1000$.

Ejemplo. Demostremos que $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = \{-1, +1, -1, +1, \ldots\}$ diverge. Es obvio que sólo hay dos candidatos a ser el límite, -1 y 1. Para demostrar que 1 no es el límite de la sucesión consideramos el entorno de centro $x_0 = 1$ y radio

$\epsilon = 1$, esto es $E(x_0 = 1; \epsilon = 1) = (1-1, 1+1) = (0,2)$. Vemos que existe un número infinito de términos de la sucesión, todos los de la forma $(-1)^{2k+1} = -1$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$, que no pertenecen a dicho entorno. De manera similar, se demuestra que -1 tampoco es el límite de la sucesión. Basta considerar el entorno $E(x_0 = -1; \epsilon = 1) = (-1-1, -1+1) = (-2, 0)$. Claramente los infinitos términos de la sucesión que son de la forma $(-1)^{2k} = 1$, con $k = 1, 2, \ldots$, no pertenecen al intervalo $(-2, 0)$.

Según la definición vista anteriormente, los términos de una sucesión de números reales forman un conjunto en $\mathbb{R}$. Por tanto, es fácil establecer cuando una sucesión es *acotada*.

Definición 12 *Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada (superior e inferiormente) si existe un número real k tal que $|a_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lfloor n/2 \rfloor / n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\lfloor z \rfloor$ indica el mayor entero menor o igual que $z \in \mathbb{R}$. Por tanto, tenemos que

$$|a_n| = \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{n} \leq \frac{n/2}{n} = \frac{1}{2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es la sucesión es acotada.

El siguiente teorema nos permite garantizar que ciertas sucesiones son divergentes usando la noción de acotación.

Teorema 1 *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada. Equivalentemente, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión divergente.*

Es importante ser consciente de que el teorema no dice que toda sucesión acotada sea convergente. Por ejemplo, la sucesión $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada pero no es convergente!

Definición 13 *Decimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada superiormente y escribimos $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ si para todo $R > 0$ existe $N_R \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_R$ implica que $a_n > R$. De manera análoga, decimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada inferiormente y escribimos $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ si para todo $R > 0$ existe $N_R \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_R$ implica que $a_n < -R$.*

Otra propiedad de las sucesiones de números reales que podemos estudiar es la monotonía.

Definición 14 *Una sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es monótona creciente si, para todo* $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \geq a_n$ *(si* $a_{n+1} > a_n$ *la sucesión es monótona estrictamente creciente). Por otra parte, una sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es monótona decreciente si, para todo* $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leq a_n$ *(si* $a_{n+1} < a_n$ *la sucesión es monótona estrictamente decreciente).*

NOTA. Equivalentemente, si todos los términos de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son positivos, la sucesión es monótona creciente si $a_{n+1}/a_n \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (es monótona decreciente si $a_{n+1}/a_n \leq 1$).

Ejemplos.

- La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{13, 23, 33, \ldots\}$ es monótona estrictamente creciente.
- La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\, n/(n+1)\,)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona estrictamente creciente. De hecho (todos los términos son positivos) tenemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n^2+2n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1$$

  para todo $n \in \mathbb{N}$.

La monotonía resulta muy útil a la hora de demostrar la convergencia de sucesiones.

Teorema 2 *Si una sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es monótona creciente y está acotada superiormente, entonces es convergente. Si una sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es monótona decreciente y está acotada inferiormente, entonces es convergente.*

Hay que tener cuidado a la hora de interpretar el teorema anterior. Si una sucesión es convergente entonces sabemos que está acotada (superior e inferiormente), pero la convergencia no implica que la sucesión tenga que ser monótona. Por ejemplo, la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{(-1)^n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 y por tanto está acotada (basta ver que todos los términos están contenidos en el intervalo finito $[-1, 1]$), pero no es una sucesión monótona ya que sus términos van alternando valores negativos y positivos.

2.1.1. Cálculo de límites de sucesiones

En este apartado, analizamos algunos teoremas muy útiles para calcular límites de sucesiones cuando $n \to \infty$.

Teorema 3 ***(aritmética de límites)*** *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones convergentes tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, entonces se verifica lo siguiente.*

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b\,.$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = a\,b\,.$

(iii) *Si* $b \neq 0$ *:* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}\,.$

(iv) *Si a y b no son nulos a la vez:* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)} = a^b\,.$

(v) *Si $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ($a > 0$):* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \ln(a_n) = \ln\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \ln(a)\,.$

En el caso de sucesiones no convergentes con límite $\pm\infty$ (o en casos distintos de los considerados en el Teorema 3), la aritmética de límites es aplicable cuando matemáticamente tenga sentido, como describe el siguiente resultado.

Teorema 4 *Se verifica lo siguiente.*

(i) *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$ *:* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0\,;$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \pm\infty$ *y* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = \mp\infty.$

(ii) *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *:* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n\, b_n = 0.$

(iii) *Si* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ *y* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$ *:* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n\, b_n = \pm\infty$ *si* $a > 0$ *y* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n\, b_n = \mp\infty$ *si* $a < 0\,.$

(iv) *Si* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ *y* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$ *:* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \pm\infty\,.$

(v) *Si* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *y* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$ *:* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n\, b_n = \pm\infty\,.$

(vi) *Si* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *y* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$ *:* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n\, b_n = \mp\infty\,.$

(vii) *Si* $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ *y* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$*, con* $b_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*:* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ *si* $a > 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$ *si* $a < 0$.

(viii) *Si* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*, con* $a_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, y* $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$*:* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \pm\infty$.

(ix) *Si* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *y* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$*:* $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = +\infty$ *si* $b > 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 0$ *si* $b < 0$*;* $\lim_{n\to\infty} b_n^{a_n} = +\infty$ *si* $b > 1$ *y* $\lim_{n\to\infty} b_n^{a_n} = 0$ *si* $0 < b < 1$.

Sin embargo, no se puede asignar un resultado directo a todas aquellas expresiones que dan lugar a cualquiera de las siete *indeterminaciones* siguientes:

$$+\infty - \infty\,, \quad 0\,(\pm\infty)\,, \quad \frac{0}{0}\,, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\,, \quad 0^0\,, \quad (\pm\infty)^0\,, \quad 1^{(\pm\infty)}\,.$$

Notése que la última forma de indeterminación aparece cuando tenemos un límite del tipo

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n}$$

donde $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$. En dichos casos, habrá que manipular las expresiones involucradas o usar ciertos teoremas para poder llegar a alguna conclusión.

Teorema 5 ***(criterio de Stolz)*** *Sean* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dos sucesiones tales que se verifica una de las siguientes condiciones:*

- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es monótona estrictamente creciente y diverge a* $+\infty$*;*
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es monótona estrictamente decreciente tal que* $b_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y además* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Entonces, en el supuesto de que el límite siguiente exista

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = L\,,$$

con $L \in \mathbb{R}$ *o* L *infinito, se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L\,.$$

Teorema 6 *Si existe* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, *con* $L \in \mathbb{R}$ *o* L *infinito, entoces se cumple que*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = L$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} = L$, *si* $a_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 7 *Si* $a_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\lim_{n\to\infty} a_n \,/\, a_{n-1} = L$, *con* $L \in \mathbb{R}$ *o* L *infinito, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L\,.$$

Ejemplo. Gracias al teorema anterior, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Teorema 8 ***(fórmula de Stirling)*** *Se verifica que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1\,.$$

Por tanto, para n *suficientemente grande, se puede utilizar la equivalencia*

$$n! \;\approx\; n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,.$$

Teorema 9 ***(criterio del sándwich)*** *Si* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *son dos sucesiones tales que* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$ *(con* $L \in \mathbb{R}$ *o* L *infinito) y* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es otra sucesión que satisface* $a_n \le c_n \le b_n$ *para todo* $n \ge N$, *con* $N \in \mathbb{N}$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} c_n = L$.

Ejemplo. Sea $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{n!}{n^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Tenemos que

$$a_n = 0 \;\le\; c_n = \frac{1\,2\,3\,\ldots\,n}{n\,n\,n\,\ldots\,n} = \frac{1}{n}\left(\frac{2\,3\,\ldots\,n}{n\,n\,\ldots\,n}\right) \;\le\; \frac{1}{n} = b_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Siendo $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$, por el criterio del sándwich concluimos que el límite de la sucesión dada, cuando $n \to \infty$, es también igual a 0.

Teorema 10 *(indeterminación 1^∞) Si* $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$ *y existe* $\lim_{n\to\infty}(a_n - 1)\, b_n$*, entonces se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-1)\, b_n} .$$

Además, es muy útil acordarse del siguiente límite 'fundamental':

$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{1/a_n} = e \,,$$

si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Veámos ahora un ejemplo en el que se ponen en práctica algunos de los teoremas introducidos.

Ejemplo. Calculamos $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln(n)}$.

Este es un clásico límite que se resuelve mediante el criterio de Stolz, considerando $a_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ y $b_n = \ln(n)$. Es fácil demostrar que la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona estrictamente creciente y diverge a $+\infty$; por tanto se cumple una de las condiciones del criterio. Así pues

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln(n)-\ln(n-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n\right)} = \frac{1}{\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n\right)} = \frac{1}{\ln(e)} = 1\,,$$

donde hemos usado varias propiedades de los límites (¿cuáles?) y además

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left[1^{(+\infty)}\right] = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{n}{n-1}-1\right)} = e\,.$$

Terminamos este apartado observando que, cuando $n\to\infty$, tenemos las siguientes relaciones

$$\ln(n) \ll n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n\,,$$

donde $\alpha > 0$ y $a > 1$ (por ejemplo, $a = e$). El símbolo $\ll$ (que intuitivamente interpretamos como 'mucho menor que') tiene el siguiente significado formal: dadas dos sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, decimos que

$$a_n \ll b_n \ \text{ si } n \to \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0\,.$$

Ésto nos da una idea de los términos que crecen 'más rapidamente' con n a la hora de calcular un límite.

2.1.2. Sucesiones recurrentes

Existen sucesiones que no se definen mediante la expresión explícita de su término general, sino a través de una relación que permite generar cada término de la sucesión a partir del anterior. Una sucesión de este tipo se llama *recurrente* (o *por recurrencia* o *recursiva*). Por ejemplo, la sucesión de números reales definida por

$$a_1 = 1\,, \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,$$

es recurrente. Notése que un término de la sucesión (normalmente el primero) tiene que ser conocido para poder usar la fórmula implícita en la definición. En el ejemplo anterior, dado $a_1 = 1$, podemos calcular

$$a_2 = \sqrt{2a_1 + 3} = \sqrt{5}\,, \quad a_3 = \sqrt{2a_2 + 3} = \sqrt{2\sqrt{5} + 3}\,, \ \ldots\,.$$

Demostrar propiedades de una sucesión recurrente puede no ser tan intuitivo como en otros casos. El principio de inducción puede resultar útil a la hora de demostrar su acotación y monotonía. Por otra parte, el cálculo de su límite se suele abordar como en el ejemplo siguiente, que debe de considerarse como un problema 'modelo' para el estudio de sucesiones recurrentes.

Ejemplo. Consideramos la siguiente sucesión recurrente de números reales

$$a_1 = 0\,, \quad a_{n+1} = -4 + \frac{a_n}{3} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.1}$$

Demostremos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y monótona, y calculemos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Es conveniente empezar el análisis suponiendo que el límite de la sucesión (cuando $n \to \infty$) existe finito, esto es

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}\,.$$

Entonces, usando algunas propiedades de los límites, podemos escribir

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(-\,4+\frac{a_n}{3}\right) \;\Longrightarrow\; L=-4+\frac{L}{3} \;\Longrightarrow\; L=-6\,,$$

donde hemos usado que $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$, gracias a la hipótesis hecha. Por tanto, si dicho límite existe, necesariamente tendrá el valor $L = -6$. Con el objetivo de confirmar su existencia, vamos a estudiar la acotación y la monotonía de la sucesión. Usando la fórmula (2.1), vemos que $a_1 = 0$, $a_2 = -4$, $a_3 = -16/3$, $\ldots$, esto es parece que la sucesión es decreciente. Para demostrar que $a_{n+1} < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ apliquemos el principio de inducción. Primero, $a_2 = -4 < a_1 = 0$. Ahora, suponiendo que $a_{k+1} < a_k$ para $n = k$, tenemos que $(n = k+1)$

$$a_{k+2} = -4 + \frac{a_{k+1}}{3} < -4 + \frac{a_k}{3} = a_{k+1}\,,$$

lo que completa la demostración de que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente. A este punto, probemos que la sucesión es acotada, concretamente que $-6 \le a_n \le 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (donde la elección de -6 como cota inferior se justifica por todo lo que hemos analizado hasta ahora y la elección de 0 como cota superior es trivial siendo todos los términos de la sucesión negativos). Apliquemos nuevamente el principio de inducción: tenemos que $-6 \le a_1 = 0 \le 0$, suponemos que $-6 \le a_k \le 0$ para $n = k$ y concluimos que $(n = k+1)$

$$a_{k+1} = -4 + \frac{a_k}{3} \ge -4 - \frac{6}{3} = -6\,, \quad a_{k+1} = -4 + \frac{a_k}{3} \le -4 + \frac{0}{3} = -4 < 0\,,$$

lo que completa la demostración de que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Así pues, siendo acotada y monótona, la sucesión dada es convergente y $\lim_{n\to\infty} a_n = -6$, como calculado previamente.

2.2. Series de números reales

Estamos familiarizados con sumas finitas de números reales: pero ¿tiene sentido o es posible sumar infinitos términos? La respuesta es afirmativa y se formaliza a través del concepto matemático de *serie*.

Definición 15 *Dada una sucesión de números reales, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se llama serie de números reales, determinada por dicha sucesión, a la suma infinita*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \;=\; a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots\,. \tag{2.2}$$

En (2.2), a_n se denomina *término general* de la serie, donde n juega el papel de 'índice'. Para dotar de un sentido matemático coherente a las series, se establecen las siguientes definiciones.

Definición 16 *Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es sumable o convergente si existe y es finito el límite, cuando $k \to \infty$, de la sucesión de las sumas parciales $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$, esto es*

$$\lim_{k\to\infty} S_k \;=\; \lim_{k\to\infty} (\, a_1 + a_2 + \ldots + a_k \,) \;=\; S \in \mathbb{R}\,.$$

En este caso, decimos que la suma de la serie vale S. Al contrario, si el límite de $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ no existe o es infinito, se dice que la serie es no sumable o divergente.

Obsérvese que, en la definición anterior, hemos abordado la tarea de sumar infinitos términos echando mano del concepto de límite de la sucesión de las sumas parciales $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Por tanto la teoría asociada a las series está estrechamente ligada a la de las sucesiones.

NOTAS.

- La convergencia de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no es equivalente a la convergencia de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que la define. Por ejemplo, la serie definida por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{\,1, 1, 1, \ldots\,\}$ es obviamente divergente, mientras que $\lim_{n\to\infty} a_n \;=\; 1\,.$

- Gracias a las propiedades de los límites de sucesiones de números reales, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\, a_n \pm b_n \,] \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \;\pm\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\, c\, a_n \,] \;=\; c\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,, \quad \text{con } c \in \mathbb{R}\,.$$

  En otras palabras, la convergencia de las series de la izquierda es equivalente a la convergencia de las series de la derecha.

- La convergencia de una serie no se ve afectada si eliminamos, modificamos o añadimos un número finito de términos, pues la sucesión de sus sumas parciales sería la misma a menos de una constante aditiva. Sin embargo, sí cambiaría el valor de la suma de la serie en caso de convergencia.

Analizamos ahora algunas series conocidas que resultarán muy útiles a la hora de estudiar la convergencia de una serie dada.

Serie geométrica. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n \;=\; 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots$, donde $r \in \mathbb{R}$.

Esta serie es famosa por, entre otras, dos razones fundamentales: porque surge en múltiples problemas interesantes y además sabemos calcular sus sumas parciales. En efecto, se puede demostrar por el principio de inducción que sus sumas parciales son

$$S_k \;=\; 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots\; + r^k \;=\; \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}$$

si $r \neq 1$ y $S_k = k$ si $r = 1$ (con $k \in \mathbb{N}$). Entonces, se tiene que

(i) si $|r| \geq 1$: S_k diverge $\;\Longrightarrow\; \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ diverge;

(ii) si $|r| < 1$: $\displaystyle\lim_{k\to\infty} S_k \;=\; \frac{1}{1-r} \;\Longrightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge y su suma vale $\dfrac{1}{1-r}$.

Ejemplo. La serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ converge porque $1/5 < 1$ y su suma vale $1/(1 - 1/5) = 5/4$.

Serie telescópica. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$.

Sus sumas parciales son

$$S_k \;=\; b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + b_3 - b_4 + \ldots + b_k - b_{k+1} \;=\; b_1 - b_{k+1}\,,$$

con $k \in \mathbb{N}$; por tanto $\lim_{k\to\infty} S_k \;=\; b_1 - \lim_{k\to\infty} b_{k+1} \;=\; b_1 - \lim_{k\to\infty} b_k$. Se concluye que una serie telescópica converge si y solo si la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Ejemplo. Consideremos la serie telescópica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.

En este caso, observamos que $b_n = 1/n$, cuyo límite cuando $n \to \infty$ es 0. Se tiene entonces que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 1\,.$$

Saber si una serie converge o no teniendo en cuenta solamente la sucesión de sus sumas parciales suele ser complicado porque, en general, no contaremos con expresiones manejables para $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Por tanto, se requieren teoremas y criterios que nos faciliten la tarea sin tener que recurrir a dichas sumas.

Teorema 11 ***(condición necesaria de convergencia)*** *Si una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente, entonces* $\lim_{n \to \infty} a_n = 0\,.$

Por tanto, toda serie convergente tiene un término general que tiende a 0. Sin embargo, esta condición no es suficiente para garantizar la convergencia de la serie. La serie más famosa que justifica lo que acabamos de ilustrar es la *serie armónica principal*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,.$$

Esta serie cumple la condición necesaria, esto es $\lim_{n \to \infty} 1/n = 0$, sin embargo no es convergente ya que se puede demostrar (aunque no lo vamos a hacer aquí) que el límite de la sucesión de sus sumas parciales es infinito.

Por otra parte, la condición necesaria de convergencia sirve para asegurar de una forma sencilla si una serie diverge. En efecto, si $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente. Por ejemplo, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1}$$

diverge porque $\lim_{n \to \infty} a_n = 1 \neq 0\,.$

2.2.1. Series de términos positivos

En lo que sigue queremos obtener criterios para saber el carácter de una serie, esto es determinar si una serie dada converge o diverge. Como vimos, el carácter de una serie no cambia cuando alteramos una cantidad finita de términos. Por tanto, aunque las series involucradas comienzan en $n = 1$, todos los teoremas a continuación siguen siendo válidos para series que empiezan en $n = n_0 \in \mathbb{N}$ arbitrario. Además, todos los resultados de este apartado serán válidos solo para series de términos positivos.

Definición 17 *Una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es de términos positivos si* $a_n > 0\,,\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$

NOTAS.

- Si una serie tiene todos los términos positivos excepto una cantidad finita de términos negativos, entonces tiene el mismo carácter que la serie obtenida eliminando los términos negativos. Por tanto, dicha serie se comporta de modo equivalente a las series de términos positivos y podemos aplicar los criterios a continuación.

- Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tiene todos sus términos negativos, entonces podemos considerar $a_n = -b_n$, de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -\sum_{n=1}^{\infty}(\,-b_n\,) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, donde esta última serie es de términos positivos. Teniendo en cuenta que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tienen el mismo carácter, entonces podemos aplicar los criterios de este apartado a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Teorema 12 ***(criterio del cociente)*** *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L\,.$$

Entonces, se verifica que:

(i) $L > 1 \implies \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge;*

(ii) $L < 1 \implies \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge;*

(iii) $L = 1 \implies$ *el criterio no decide y la serie puede ser convergente o no.*

Ejemplo. Estudiamos el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}\,.$

En este caso, $a_n = 1/(3^n+1) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n+1}{3^{n+1}+1} = \frac{1}{3} < 1\,.$$

Por tanto, el criterio del cociente indica que la serie es convergente.

Teorema 13 ***(criterio de la raíz)*** *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L\,.$$

Entonces, se verifica que:

$$(i)\ \ L > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ diverge;}$$

$$(ii)\ \ L < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ converge;}$$

$$(iii)\ \ L = 1 \implies \text{el criterio no decide y la serie puede ser convergente o no.}$$

Ejemplo. Estudiamos el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n + 2}$.

En este caso, $a_n = 1/(e^n + 2) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y además

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{e^n+2}} = \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{1+\frac{2}{e^n}}} = \frac{1}{e} < 1\,.$$

Por tanto, el criterio de la raíz indica que la serie es convergente.

Teorema 14 ***(criterio de comparación)*** *Sean* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dos sucesiones de números reales que cumplen* $0 \le a_n \le b_n$ *para todo* $n \ge n_0 \in \mathbb{N}$. *Entonces*

$$(i)\ \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \text{ converge} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ converge;}$$

$$(ii)\ \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ diverge} \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \text{ diverge.}$$

Hay que tener en cuenta que el criterio de comparación no da información cuando no estamos en las condiciones de los apartados (i) o (ii). El siguiente criterio es en cierto sentido equivalente al anterior, pero resulta más fácil de utilizar en la práctica.

Teorema 15 ***(criterio de comparación por paso al límite)*** *Sean* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *dos series de términos positivos tales que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L\,.$$

Entonces, se verifica que:

(i) $0 < L < +\infty$ *: las series* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *tienen el mismo carácter, esto es si una serie converge la otra también converge y si una serie diverge la otra también diverge;*

(ii) $L = 0$ *:* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge* $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge*

(de forma equivalente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge* $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge);*

(iii) $L = +\infty$ *:* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge* $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge*

(de forma equivalente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge* $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge).*

Los criterios de comparación son útiles en la práctica si tenemos unas series de referencia para poder comparar. En este sentido, además de las series geométrica, telescópica y armónica vistas anteriormente, conviene tener presente el carácter de las llamadas *p-series*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\,, \quad \text{con } p \in \mathbb{R} \;:$$

- si $p > 1$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge;
- si $p \leq 1$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge.

Ejemplo. Estudiamos la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 4n + 5}$.

Se tiene que

$$0 \le a_n = \frac{1}{n^3+4n+5} \le \frac{1}{n^3} = b_n\,,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una p-serie convergente ($p = 3 > 1$). Gracias al criterio de comparación se concluye que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también es convergente.

Ejemplo. Estudiamos la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)^2}$.

Llamemos $a_n = \dfrac{n-1}{(n+1)^2}$ y sea $b_n = \dfrac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n^2+2n+1} = 1\,.$$

Entonces las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter. Siendo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergente (es la serie armónica), se concluye que la serie dada diverge también gracias al criterio de comparación por paso al límite.

2.2.2. Series de términos cualesquiera y series alternadas

En este apartado, analizamos resultados más generales relacionados con series de términos no necesariamente positivos.

Definición 18 ***(convergencia absoluta)*** *Una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es absolutamente convergente si* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge.*

Teorema 16 *Si una serie es absolutamente convergente, entoces es convergente.*

Hay que tener cuidado porque el recíproco del teorema anterior no es cierto. Por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$ es convergente (veáse más abajo) pero no es absolutamente convergente, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n/n| = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ es divergente. Por otra parte, el Teorema 16 sugiere una forma de estudiar el carácter de una serie de términos no necesariamente positivos: dado que $|a_n| \ge 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos aplicar a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ todos los criterios estudiados en el apartado anterior.

Ejemplo. Estudiamos la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{3^n}$.

Tenemos que

$$|a_n| \;=\; \frac{|\cos(n)|}{3^n} \;\leq\; \left(\frac{1}{3}\right)^n \;=\; b_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, siendo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergente (es una serie geométrica con $r = 1/3 < 1$), gracias al criterio de comparación la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge y, por el Teorema 16, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dada converge también.

Definición 19 ***(convergencia condicional)*** *Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es condicionalmente convergente si es convergente pero no es absolutamente convergente.*

Finalizamos el capítulo describiendo unas series especiales, aquellas cuyos términos van cambiando de signo alternativamente.

Definición 20 *Una serie se llama alternada si es de la forma*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \;=\; a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots\,,$$

con $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 17 ***(criterio de Leibniz)*** *Dada la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, si la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente y $\lim_{n\to\infty} a_n \;=\; 0$, entonces la serie converge.*

Obsérvese que, en el caso de no cumplirse la condición de monotonía del Teorema 17, no podemos concluir que la serie considerada es divergente; simplemente tendríamos que usar otro criterio para decidir su carácter.

Ejemplo. Se considere la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$. Llamando $a_n = 1/n$, es fácil ver que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Así pues, la serie converge (solo condicionalmente) gracias al criterio de Leibniz.