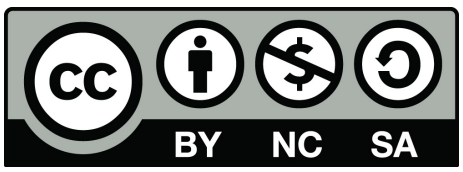
uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

CÁLCULO

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero



Índice general

1. Conjuntos de números **3**

1.1. Números naturales 3

1.2. Números enteros 6

1.3. Números racionales e irracionales 6

1.4. Números reales 7

1.4.1. Propiedades de los números reales 8

1.5. Números complejos 11

2. Sucesiones y series de números reales **13**

2.1. Sucesiones de números reales 13

2.1.1. Cálculo de límites de sucesiones 17

2.1.2. Sucesiones recurrentes 21

2.2. Series de números reales 22

2.2.1. Series de términos positivos 25

2.2.2. Series de términos cualesquiera y series alternadas 29

3. Funciones reales: límites y continuidad **31**

3.1. Conceptos generales 31

3.2. Límite de una función real 35

3.3. Propiedades de los límites 38

3.4. Continuidad de funciones reales 38

3.5. Teoremas sobre funciones continuas 42

4. Funciones reales: derivabilidad **45**

4.1. Introducción 45

4.2. Interpretación geométrica 46

4.3. Interpretación física 47

4.4. Funciones derivables 47

4.5. Reglas de derivación 50

4.6. Teoremas sobre funciones derivables 53

4.7. Funciones potencia 56

5. Polinomio de Taylor **63**

5.1. Introducción 63

5.2. El polinomio de Taylor 64

5.3. Cálculo de límites indeterminados 68

5.4. Serie de Taylor 70

6. Comportamiento local y global de una función real **73**

6.1. Extremos de una función 73

6.2. Comportamiento local 74

6.3. Comportamiento local y polinomio de Taylor 76

6.4. Comportamiento global 77

7. Integración: teoremas fundamentales y técnicas **79**

7.1. Integral definida 79

7.2. Teoremas Fundamentales del Cálculo 84

7.3. Técnicas de integración 87

7.3.1. Integración por partes 88

7.3.2. Integración de funciones racionales 89

7.3.3. Integración por cambio de variable 93

7.3.4. Integración de funciones trigonométricas 95

7.3.5. Integración de funciones irracionales 97

8. Integrales impropias **101**

8.1. Integrales impropias de primera especie 102

8.1.1. Criterios de convergencia 104

8.2. Integrales impropias de segunda especie 106

Capítulo 4

Funciones reales: derivabilidad

4.1. Introducción

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$ un punto interior de su dominio.

Definición 32 *Se dice que f es derivable en x_0 si el límite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{4.1}$$

existe y es finito. En este caso, llamamos a dicho límite la derivada primera de f en x_0 y lo denotamos mediante $f'(x_0)$.

Definición 33 *La función f' que asocia el valor $f'(x)$ a cada $x \in D$ donde f es derivable se denomina función derivada primera de f con respecto a x.*

De forma equivalente podemos escribir

$$f'(x_0) \equiv \frac{df}{dx}(x_0) \equiv \frac{df}{dx}_{|\, x=x_0}.$$

Por otra parte, se define la función derivada segunda, $f'' \equiv \frac{d^2 f}{dx^2}$, como la derivada primera de f' con respecto a x y, en general, se define la función derivada n-esima, $f^{(n)} \equiv \frac{d^n f}{dx^n}$ (con $n \in \mathbb{N}$), como la derivada primera de $f^{(n-1)}$ con respecto a x (aquí $f^{(0)} = f$).

Ejemplo. Sea $f(x) = x^2$ cuyo dominio es $\mathbb{R}$. Para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, el siguiente límite existe y es finito:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0\,.$$

Por tanto, podemos definir la función $f'(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo. Sea

$$f(x) \;=\; \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

Entonces

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0\,,$$

donde la última igualdad se cumple porque la función seno está acotada. Así pues, f es derivable en $x_0 = 0$ y tenemos $f'(0) = 0$.

4.2. Interpretación geométrica

Sea f una función derivable en $x = x_0$. Se considere la recta secante en el plano cartesiano que pasa por los puntos con coordenadas $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, donde $h > 0$ es un incremento (veáse Figura 4.1). Dicha recta tiene pendiente igual a $(\, f(x_0 + h) - f(x_0)\,) \,/\, h$. Si ahora consideramos h arbitrariamente pequeño (esto

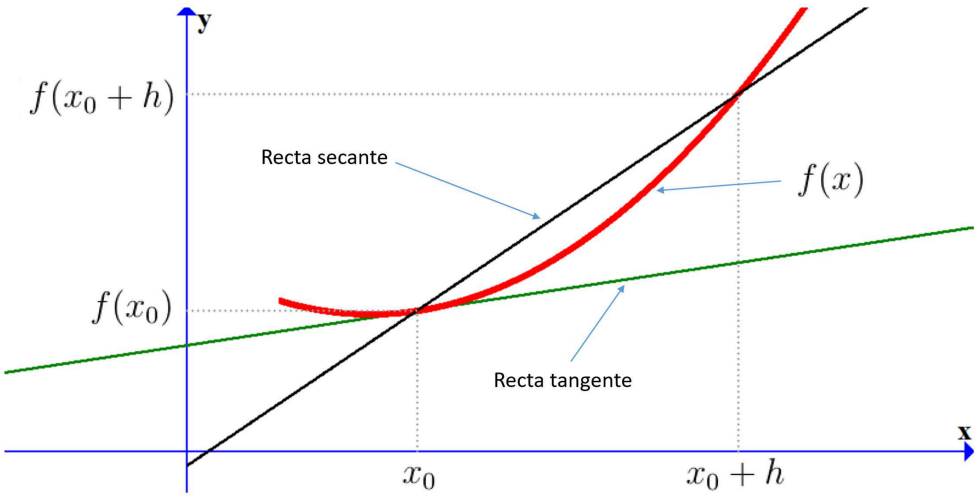


Figura 4.1: Interpretación geométrica de la derivada.

es $h \to 0$), entonces $x_0 + h \to x_0$ y la recta secante 'tiende hacia' la *recta tangente*

a la función f en $x = x_0$ (Figura 4.1), cuya pendiente se puede expresar como

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} ,$$

después de observar que el límite anterior coincide con el límite de la Definición 32 mediante el cambio de variable $x = x_0 + h$. Por tanto, *la derivada de una función en un punto tiene el significado geométrico de pendiente de la recta tangente a dicha función en ese punto.* Finalmente, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = x_0$ se puede escribir

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) . \tag{4.2}$$

Notése que (4.2) tiene sentido solo si $f'(x_0)$ existe y es finito.

4.3. Interpretación física

Se considere un objeto lanzado hacia arriba en dirección vertical desde una cierta altura (movimiento rectilíneo). Su trayectoria (posición en el tiempo) podría describirse mediante una función $f(t)$, donde la variable independiente t juega el papel de tiempo. En este caso, la velocidad media del objeto en un cierto intervalo $[t_0, t_0 + h]$, siendo t_0 un instante concreto y $h > 0$ un incremento, se puede escribir $(f(t_0 + h) - f(t_0)) / h$ (ratio entre la variación de su posición y el tiempo transcurrido). Así pues, la velocidad instantánea del objeto en $t = t_0$ se obtiene mediante el límite $h \to 0$, esto es

$$f'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} ,$$

que expresa la tasa de cambio de la posición del objeto con respecto al tiempo. En general, *la derivada tiene el significado físico de tasa de cambio de una cierta cantidad con respecto a una variable independiente.*

4.4. Funciones derivables

Una función f es derivable en un intervalo abierto (acotado o no) si f es derivable para todo x en dicho intervalo, según la Definición 32. Notése que el límite involucrado exige que x pueda acercarse arbitrariamente a x_0 bien por la izquierda bien por la derecha. Por tanto, (4.1) pierde su validéz cuando la definición de la función f no es válida o cambia para $x < x_0$ o $x > x_0$. En esos casos, necesitamos definir la derivabilidad de una función en un punto de forma distinta.

Definición 34 *Se dice que f es derivable en x_0 por la izquierda si el límite*

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{4.3}$$

existe y es finito. En este caso, llamamos a dicho límite la derivada de f en x_0 por la izquierda y lo denotamos mediante $f'(x_0^-)$.

Definición 35 *Se dice que f es derivable en x_0 por la derecha si el límite*

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{4.4}$$

existe y es finito. En este caso, llamamos a dicho límite la derivada de f en x_0 por la derecha y lo denotamos mediante $f'(x_0^+)$.

Teorema 31 *Una función f es derivable en x_0 si y solo si $f'(x_0^-)$ y $f'(x_0^+)$ existen, son finitos y coinciden.*

Ejemplo. Sea f definida en un intervalo cerrado $[a,b]$, con $a,b\in\mathbb{R}$. Decimos que f es derivable en $[a,b]$ si f es derivable para todo $x\in(a,b)$ y $f'(a^+)$, $f'(b^-)$ existen y son finitos.

Ejemplo. La función $f(x)=|x|$ (Figura 4.2) no es derivable en $x_0=0$. De hecho, tenemos que

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1\,,$$
$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1\,.$$

Otra propiedad importante relaciona la continuidad y la derivabilidad de una función en un punto.

Teorema 32 *Si f es derivable en x_0 entonces f es continua en x_0.*

Dem. Siendo f derivable en x_0 y usando algunas propiedades de los límites, podemos escribir

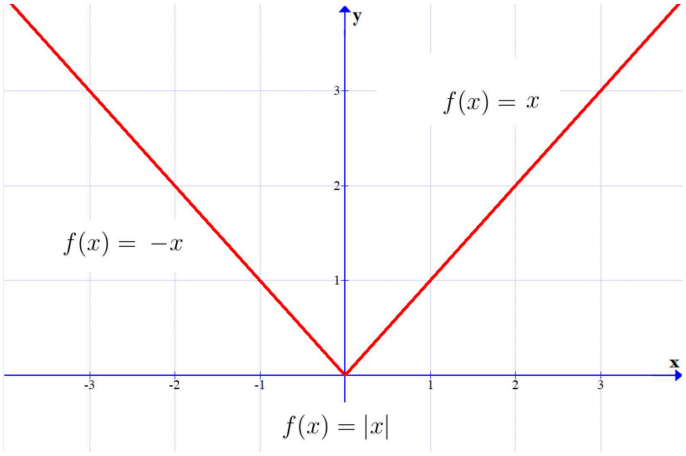


Figura 4.2: Función valor absoluto, $f(x) = |x|$.

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x\to x_0} (x - x_0)$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 \; = \; 0 \, .$$

Esto implica que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x_0) = f(x_0)$, que es la definición de continuidad de f en x_0.

NOTA. La implicación contraria es falsa, pues existen funciones continuas pero no derivables en un punto (por ejemplo $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$). Por otra parte, si f no es continua en x_0 entonces tampoco es derivable en ese punto.

Típicamente una función f no es derivable en un punto x_0 si (veáse Figura 4.3):

- f no es continua en x_0;
- x_0 es un 'punto anguloso', esto es las derivadas de f en x_0 por la izquierda y por la derecha existen y son finitas pero son distintas (podríamos decir que hay una recta tangente a f en x_0 por la izquierda y una recta tangente a f en x_0 por la derecha);
- x_0 es un 'punto con tangente vertical', esto es $f'(x_0) \to \pm\infty$ cuando $x \to x_0$.

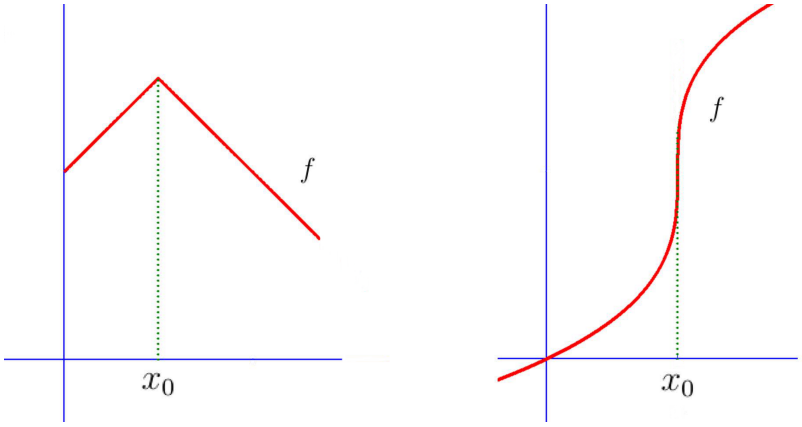


Figura 4.3: Ejemplos de función f no derivable en x_0.

4.5. Reglas de derivación

Asumimos conocidas las derivadas de todas las funciones elementales: por ejemplo, $\text{sen}'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\text{sen}(x)$ y $(e^x)' = e^x$, en sus respectivos dominios. Por otro lado, la derivada de funciones más generales, aunque esté definida a través de un límite (Definición 32), se puede calcular en muchos casos usando los siguientes teoremas.

Teorema 33 *Sean f y g dos funciones derivables en un punto x_0 (esto es, $f'(x_0)$ y $g'(x_0)$ existen y son finitos). Entonces, cualquier combinación lineal de ellas, su producto, su cociente y su composición dan funciones derivables en x_0. Además, valen las siguientes reglas de derivación.*

- *combinación lineal:* $(c_1 f \pm c_2 g)'(x_0) = c_1 f'(x_0) \pm c_2 g'(x_0)$ *(con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).*
- *producto (regla de Leibniz):* $(f\,g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
- *cociente:* $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$ *(si $g(x_0) \neq 0$).*
- *composición (regla de la cadena):* $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\,g'(x_0)$ *(cuando $f'(g(x_0))$ existe y es finito).*

Ejemplo. Demostramos por inducción que, para todo $x \in \mathbb{R}$, si $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces $f'(x) = n\,x^{n-1}$. Si $n = 1$ tenemos que $f'(x) = 1\,x^{1-1} = 1$, la

pendiente de la recta $y = x$. Supongamos ahora que para $n = k \in \mathbb{N}$ la derivada de $f(x) = x^k$ es $f'(x) = k\,x^{k-1}$. Se considere finalmente $f(x) = x^{k+1} = x\,x^k$ $(n = k+1)$. Aplicando la regla de Leibniz se obtiene $f'(x) = 1\,x^k + x\,(x^k)'$, que por la hipótesis de inducción resulta ser $f'(x) = 1\,x^k + x\,(k\,x^{k-1}) = x^k + k\,x^k = (k+1)\,x^k$.

Ejemplo. Sea $f(x) = \dfrac{e^{\,x}\,\mathrm{sen}(x)}{x^2+1}$ con $x \in \mathbb{R}$. Pues resulta que

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)[e^{\,x}\,\mathrm{sen}(x) + e^{\,x}\cos(x)] - 2\,x\,e^{\,x}\,\mathrm{sen}(x)}{(x^2+1)^2}\,.$$

Ejemplo. Sea $h(x) = \arctan\left(f(x)/g(x)\right)$, donde f y g son dos funciones derivables $\forall x \in \mathbb{R}$ $(g \neq 0)$. Teniendo en cuenta que $(\arctan(t))' = 1/(1+t^2)$ (veáse abajo) y aplicando la regla de la cadena, podemos escribir

$$h'(x) = \frac{1}{1+\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^2}\,\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[f(x)]^2 + [g(x)]^2}\,.$$

Ejemplo. Sea $f(x) = \tan(x)$. Siendo $f(x) = \mathrm{sen}(x)\,(1/\cos(x))$, por la regla de Leibniz podemos escribir

$$f'(x) = \cos(x)\,\frac{1}{\cos(x)} + \mathrm{sen}(x)\,\frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)\,,$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots\}$.

Gracias a la regla de la cadena, es posible deducir la formula para calcular la derivada de la función inversa. Sea f una función derivable en su dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ tal que su función inversa f^{-1} existe. Así pues, aplicando la regla de la cadena a ambos lados de la igualdad $f^{-1}(f(x)) = x$, obtenemos

$$(f^{-1})'(f(x))\,f'(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}\,,$$

para todo $x \in D$ tal que $f'(x) \neq 0$. Por tanto, para todo $y \in \mathrm{im}(f)$ tal que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, la *derivada de la función inversa* se expresa como

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\,. \tag{4.5}$$

Ejemplo. Sea $f(x) = \arccos(x)$. Aplicando la regla de la cadena a ambos lados de la igualdad $\arccos(\cos(x)) = x$, se tiene que $\arccos'(\cos(x))(-\operatorname{sen}(x)) = 1$, esto es

$$\arccos'(\cos(x)) = -\frac{1}{\operatorname{sen}(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}\,,$$

con $x \in (0, \pi)$, donde $\operatorname{sen}(x) > 0$ y hemos usado $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$. Finalmente, llamando $y = \cos(x)$, resulta que

$$f'(y) \;=\; -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,,\;\; \forall y \in (-1,1)\,.$$

Ejemplo. Sea $f(x) = \arcsen(x)$. Aplicando la regla de la cadena a ambos lados de la igualdad $\arcsen(\operatorname{sen}(x)) = x$, se tiene que $\arcsen'(\operatorname{sen}(x))\cos(x) = 1$, esto es

$$\arcsen'(\operatorname{sen}(x)) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)}}\,,$$

con $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, donde $\cos(x) > 0$ y hemos usado $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$. Finalmente, llamando $y = \operatorname{sen}(x)$, resulta que

$$f'(y) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,,\;\; \forall y \in (-1,1)\,.$$

Ejemplo. Sea $f(x) = \arctan(x)$. Aplicando la regla de la cadena a ambos lados de la igualdad $\arctan(\tan(x)) = x$, se tiene que $\arctan'(\tan(x))(1 + \tan^2(x)) = 1$, esto es

$$\arctan'(\tan(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(x)}\,,$$

con $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots\}$. Finalmente, llamando $y = \tan(x)$, resulta que

$$f'(y) \;=\; \frac{1}{1+y^2}\,,\;\; \forall y \in \mathbb{R}\,.$$

Ejemplo. Sea $f(x) = \ln(x)$. Aplicando la regla de la cadena a ambos lados de la igualdad $\ln(e^{\,x}) = x$, se tiene que $\ln'(e^{\,x})\, e^{\,x} = 1$, esto es

$$\ln'(e^{\,x}) = \frac{1}{e^{\,x}}\,,$$

con $x \in \mathbb{R}$. Finalmente, llamando $y = e^{\,x}$, resulta que

$$f'(y) \;=\; \frac{1}{y}\,,\;\; \forall y > 0\,.$$

4.6. Teoremas sobre funciones derivables

En esta sección enunciamos y demostramos algunos teoremas importantes sobre funciones derivables.

Teorema 34 *Sea f una función derivable en (a,b) (abierto, no necesariamente acotado). Si $f'(x)=0$ $\forall x\in(a,b)$, entonces f es una función constante $\forall x\in(a,b)$.*

NOTA. Existen funciones no constantes que cumplen $f'(x)=0$ en todos los puntos de un intervalo abierto. Por ejemplo, $f(x)=\arctan(x)+\arctan(1/x)$ para todo $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, cumple

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+(1/x)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0\,.$$

Sin embargo, f no es constante en dicho intervalo, pues $f(1)=2\arctan(1)=\pi/2$ y $f(-1)=2\arctan(-1)=-\pi/2$.

Teorema 35 ***(Rolle)*** *Sea f una función continua en $[a,b]$ (cerrado y acotado), derivable en (a,b) y que cumple $f(a)=f(b)$. Entonces, existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.*

DEM. Siendo f una función continua en un intervalo cerrado y acotado, por el Teorema de Weierstrass f tiene máximo en x_M y mínimo en x_m. Si $x_M\in(a,b)$ (o $x_m\in(a,b)$), entonces $f'(x_M)=0$ (o $f'(x_m)=0$) siendo x_M (o x_m) un extremo local en un intervalo abierto (veáse el Capítulo 6). Si x_M y x_m coinciden con a y b (o b y a), entonces f es una función constante pues $f(a)=f(b)$ y se tiene que $f'(x)=0$ $\forall x\in(a,b)$.

NOTA. Si $f'(c)=0$, entonces f tiene una tangente horizontal en $x=c$.

Ejemplo. Sea $f(x)=x(1-x)$ con $x\in[0,1]$. Dicha función cumple todas las hipótesis del Teorema de Rolle pues $f(0)=f(1)=0$. Además $f'(x)=1-2x$ para todo $x\in(0,1)$. Podemos comprobar que existe $c=1/2\in(0,1)$ donde $f'(c)=0$.

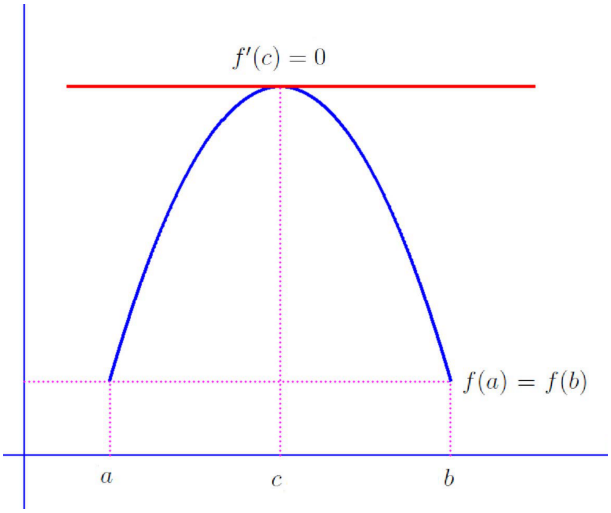


Figura 4.4: Esquema del Teorema de Rolle.

Teorema 36 ***(valor medio de Lagrange)*** *Sea f una función continua en $[a, b]$ (cerrado y acotado) y derivable en (a, b). Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

DEM. Sea $h(x) = f(x) - [\,(f(b) - f(a))/(b - a)\,](x - a)$. Dicha función es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y cumple $h(a) = h(b) = f(a)$. Por tanto, por el Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$, esto es

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0\,.$$

NOTA. Geométricamente, en las hipótesis del teorema, existe $c \in (a, b)$ tal que la recta tangente a f en $x = c$ es paralela a la recta que une los puntos del plano cartesiano con coordenadas $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Ejemplo. Sea $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$ con $x \in [0, 1]$. Dicha función cumple todas las hipótesis del Teorema del valor medio de Lagrange. Además $f'(x) = 6x^2 - 3$ para todo $x \in (0, 1)$ y $[\,f(1) - f(0)\,]/(1 - 0) = -1$. En efecto, podemos comprobar que existe $c = 1/\sqrt{3} \in (0, 1)$ tal que $f'(c) = -1$.

Teorema 37 ***(valor medio de Cauchy)*** *Sean f y g dos funciones continuas en $[a, b]$ (cerrado y acotado) y derivables en (a, b). Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que $[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c)$.*

NOTA. El Teorema del valor medio de Lagrange es la particularización de este teorema para $g(x) = x$. El Teorema del valor medio de Cauchy se puede demostrar aplicando el Teorema de Rolle a la función auxiliar $h(x) = [g(b)-g(a)]\, f(x)-[f(b)-f(a)]\, g(x)$. Además, si $g'(c) \neq 0$ y $g(b)-g(a) \neq 0$, el resultado del Teorema del valor medio de Cauchy puede escribirse

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

y tiene como consecuencia la regla de l'Hôpital para el cálculo de límites.

Teorema 38 ***(regla de l'Hôpital)*** *Sea $x_0 \in (a,b)$ y sean f, g dos funciones derivables para todo $x \in (a,b)$, con $x \neq x_0$. Si*

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \ 0 \ \ o \ \ \pm\infty$ *;*

(ii) $g'(x) \neq 0$ *para todo* $x \in (a,b)$*, con* $x \neq x_0$ *;*

(iii) $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe (finito o infinito);*

entonces $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

NOTAS.

- La regla también vale si $x \to x_0^-$ o $x \to x_0^+$ o $x \to -\infty$ o $x \to +\infty$.
- El resultado sirve para el cálculo de límites donde aparece una forma de indeterminación del tipo $0/0$ o $\pm\infty/\pm\infty$, veáse (i).
- Notése que $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x)$ puede existir aun cuando $\lim_{x\to x_0} f'(x)/g'(x)$ no existe. Por ejemplo, $\lim_{x\to+\infty} x\,/\,[\,2x+\cos(x)\,] = 1/2$, sin embargo no existe $\lim_{x\to+\infty} 1\,/\,[\,2-\operatorname{sen}(x)\,]$.

Ejemplo. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{1} = 1.$

Ejemplo. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{-\operatorname{sen}(x)}{1} = 0.$

Ejemplo. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Entonces

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-\alpha x^{-\alpha}} = 0\,.$$

Ejemplo. Usando la regla de l'Hôpital dos veces tenemos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\ln(x) - x + 1}{(x-1)\ln(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\ln(x) + 1 - 1/x} = \lim_{x\to 1} \frac{x\ln(x)}{x\ln(x) + x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{1+\ln(x)}{2+\ln(x)} = \frac{1}{2}\,.$$

4.7. Funciones potencia

Cerramos el capítulo con el análisis de una clase especial de funciones, de tipo 'potencia', de las que vamos a estudiar las propiedades principales, incluída su derivabilidad.

Funciones $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

- $f(x) = x^n \equiv \underbrace{x\ x\ \ldots\ x}_{n \text{ veces}}$.
- $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$.
- f es continua y derivable $\forall x \in \mathbb{R}$.
- $f'(x) = n\,x^{n-1}$ está definida y es continua $\forall x \in \mathbb{R}$ (veáse Sección 4.5).
- La Figura 4.5 muestra la gráfica de f para n par (izquierda) y n impar, $n \neq 1$ (derecha).

Funciones $f(x) = x^{-n}$ con $n \in \mathbb{N}$.

- $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} \equiv \underbrace{\dfrac{1}{x}\ \dfrac{1}{x}\ \ldots\ \dfrac{1}{x}}_{n \text{ veces}}$, con $x \neq 0$.
- $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- f es continua y derivable $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $f'(x) = -n\,x^{-n-1}$ está definida y es continua $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (veáse Sección 4.5).

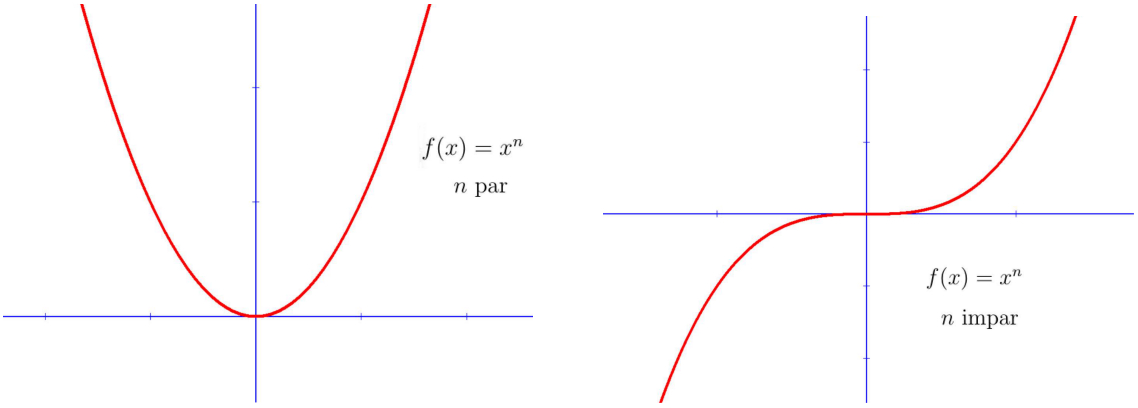


Figura 4.5: Funciones $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$. Si n es par, f es par; si n es impar, f es impar.

- La Figura 4.6 muestra la gráfica de f para n par (izquierda) y n impar (derecha).

Funciones $f(x) = x^a$ con $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

Este caso es más delicado, pues no es obvio como definir $f(x) = x^a$ cuando, por ejemplo, a es un número irracional (si a fuera racional, esto es $a = \alpha/\beta$, con α, $\beta \in \mathbb{Z}$, $\beta \neq 0$, podríamos definir $f(x) = x^a$ como aquel número cuya potencia de orden β es x^α, pero aun así habría patologías tal y como se describe abajo).

Podemos usar la definición $f(x) = x^a \equiv e^{\,a\,\ln(x)}$, con $x > 0$. Notése que esta definición es consistente, siendo exponencial y logaritmo funciones inversas, pero nos obliga a considerar $x > 0$. Sin embargo, exigir que x no sea negativo no es tan insensato, ya que, en muchos casos, algunas de las propiedades habituales entre potencias pierden su validez en el caso x^a con $x < 0$ (incluso cuando a es racional). Por otra parte, se observa que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \;=\; \lim_{x\to 0^+} x^a \;=\; \lim_{x\to 0^+} e^{\,a\,\ln(x)} \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } \; a > 0\,, \\ +\infty & \text{si } \; a < 0\,. \end{cases}$$

Por tanto, podemos extender la definición anterior para $x = 0$ cuando $a > 0$.

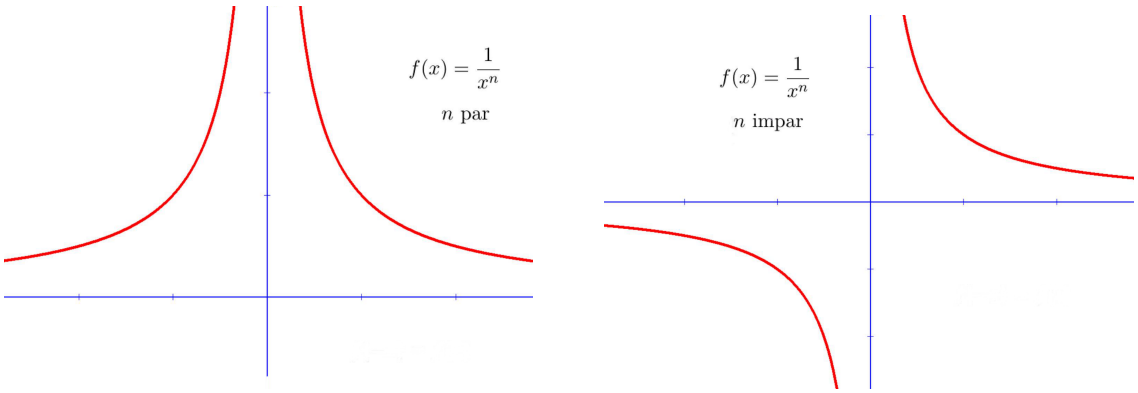


Figura 4.6: Funciones $f(x) = x^{-n}$ con $n \in \mathbb{N}$. Si n es par, f es par; si n es impar, f es impar.

Definición 36 *Sea $a < 0$. Entonces*

$$f(x) = x^a \equiv e^{\,a\,\ln(x)}, \;\; con \;\; x > 0\,.$$

Sea $a > 0$. Entonces

$$f(x) = x^a \equiv \begin{cases} e^{\,a\,\ln(x)} & si \quad x > 0\,, \\ 0 & si \quad x = 0\,. \end{cases}$$

Analicémos por separado los casos $a < 0$ y $a > 0$.

Caso $a < 0$

- $\mathrm{dom}(f) = (0, +\infty)$.
- f es continua y derivable $\forall x \in (0, +\infty)$.
- $f'(x) = a\,\dfrac{e^{\,a\,\ln(x)}}{x} = a\,\dfrac{e^{\,a\,\ln(x)}}{e^{\,\ln(x)}} = a\,e^{\,(a-1)\,\ln(x)} = a\,x^{a-1}$ está definida y es continua $\forall x \in (0, +\infty)$.
- La Figura 4.7 muestra la gráfica de $f(x) = x^a$ con $a < 0$.

Caso $a > 0$

- $\mathrm{dom}(f) = [0, +\infty)$.

- f es continua $\forall x \in [0, +\infty)$.
- Si $x > 0$, f es derivable y podemos escribir $f'(x) = a\, x^{a-1}$, que está definida y es continua por el cálculo anterior. Si $x = 0$, tenemos que

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{a\,\ln(x)}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{a\,\ln(x)}}{e^{\ln(x)}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{(a-1)\,\ln(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad 0 < a < 1\,, \\ 0 & \text{si} \quad a > 1\,. \end{cases}$$

  En otras palabras, $f(x) = x^a$ es derivable en $x = 0$ por la derecha (con f' continua en $x = 0^+$) solo cuando $a > 1$.

- La Figura 4.7 muestra la gráfica de $f(x) = x^a$ con $0 < a < 1$ y $a > 1$. Obsérvese el distinto comportamiento de la función f cerca de $x = 0$ (por la derecha) en los dos casos.

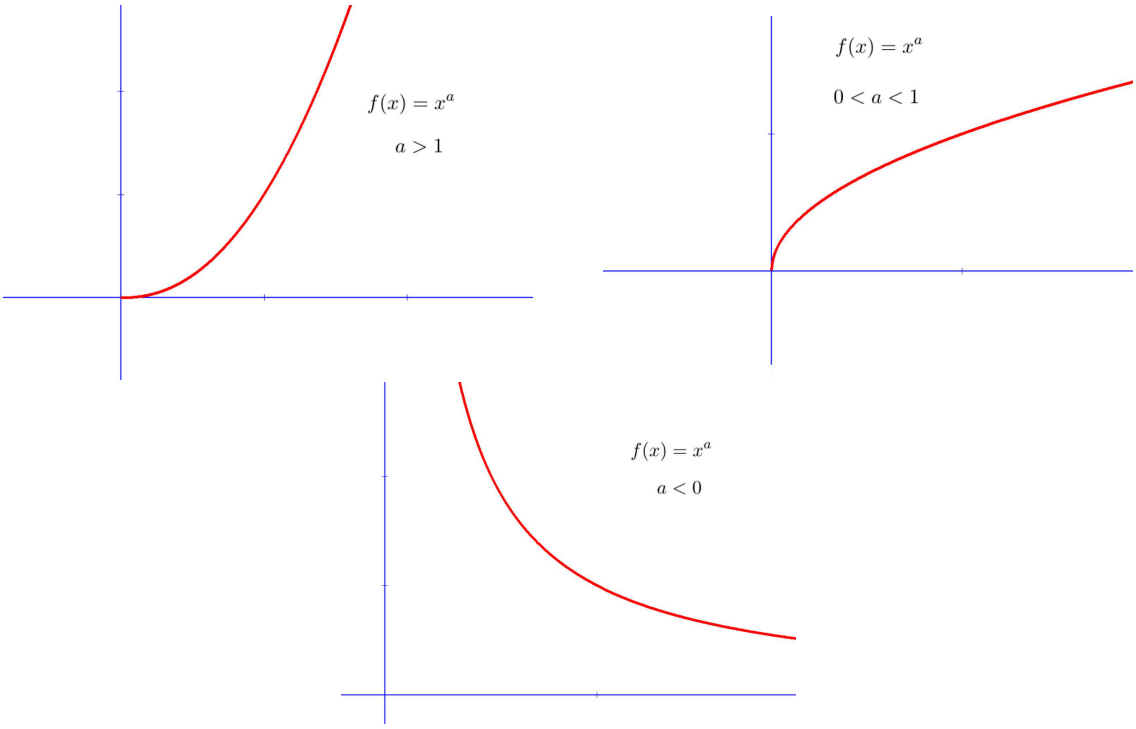


Figura 4.7: Funciones $f(x) = x^a$ con $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

NOTAS.

- Es fácil comprobar que, gracias a la Definición 36, recuperamos las siguientes propiedades clásicas entre potencias. Dados $a,\, b \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ y $x > 0$, tenemos que

$$(i)\ \ x^a x^{-a} = 1 \implies x^{-a} = \frac{1}{x^a}\,;$$
$$(ii)\ \ x^a x^b = x^{a+b}\,;$$
$$(iii)\ \ (x^a)^b = x^{ab}\,.$$

- El caso $f(x) = x^a$ con $a = 1/(2k)\,,\ k \in \mathbb{N}$, es un caso especial donde $0 < a < 1$. Observando que $(x^{\frac{1}{2k}})^{2k} = x\,$, tenemos que (para todo $x > 0$)

$$f(x) = x^{\frac{1}{2k}} = \sqrt[2k]{x} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2k\,\sqrt[2k]{x^{2k-1}}}\,.$$

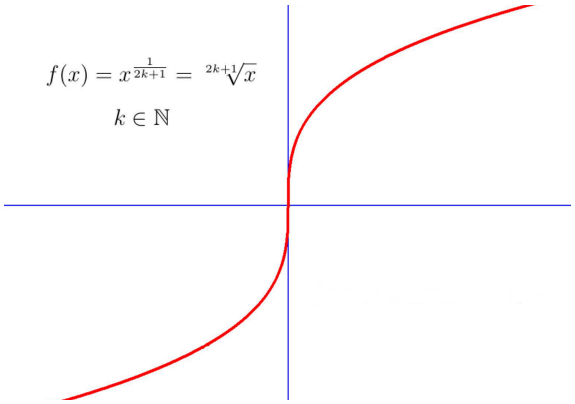


Figura 4.8: Funciones $f(x) = x^{\frac{1}{2k+1}}\,,\ k \in \mathbb{N}$.

- El caso $f(x) = x^a$ con $a = 1/(2k+1)\,,\ k \in \mathbb{N}$, es otro caso especial donde $0 < a < 1$. Aquí conviene cambiar ligeramente la Definición 36 para que dichas funciones tengan dominio igual a $\mathbb{R}$. Concretamente podemos definir

$$f(x) = x^{\frac{1}{2k+1}} \equiv \begin{cases} e^{\frac{1}{2k+1}\,\ln(x)} & \text{si} \quad x > 0\,, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0\,, \\ -e^{\frac{1}{2k+1}\,\ln(-x)} & \text{si} \quad x < 0\,, \end{cases}$$

que es continua para todo $x \in \mathbb{R}$. Además tenemos que $(x^{\frac{1}{2k+1}})^{2k+1} = x$, por tanto

$$f(x) = x^{\frac{1}{2k+1}} = \sqrt[2k+1]{x} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{(2k+1)\sqrt[2k+1]{x^{2k}}},$$

con $x \neq 0$. Observése que f no es derivable en $x = 0$. La Figura 4.8 muestra la gráfica de $f(x) = x^{\frac{1}{2k+1}}$, con $k \in \mathbb{N}$.