uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

CÁLCULO

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Índice general

Capítulo 5

Polinomio de Taylor

5.1. Introducción

Un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$ es una función real de variable real de la forma

$$P_n(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n \,, \tag{5.1}$$

donde $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$, con $p_n \neq 0$. Dado $a \in \mathbb{R}$, cualquier polinomio del tipo (5.1) puede escribirse en términos de potencias de $x - a$, esto es

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n \,, \tag{5.2}$$

donde $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, con $c_n \neq 0$.

Ejemplo. Sea $P_2(x) = 3 + 5x + 7x^2$ y $a \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 3 + 5x + 7x^2 = 3 + 5[(x-a)+a] + 7[(x-a)+a]^2 \\ &= 3 + 5a + 7a^2 + (5+14a)(x-a) + 7(x-a)^2 \,. \end{aligned}$$

Así pues tenemos que $P_2(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2$, con $c_0 = 3 + 5a + 7a^2$, $c_1 = 5 + 14a$, $c_2 = 7$.

Dado un polinomio de la forma (5.2), es evidente que

$$c_0 = P_n(a), \;\; c_1 = P_n'(a), \;\; 2c_2 = P_n''(a), \;\; \ldots, \;\; n!c_n = P_n^{(n)}(a) \,.$$

En otras palabras, el coeficiente de P_n de orden $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ es proporcional a la derivada de orden k del mismo polinomio evaluada en $x = a$, más concretamente

$$c_k = \frac{1}{k!} P_n^{(k)}(a) \,,$$

donde $P_n^{(0)}(a) \equiv P_n(a)$. Así pues (5.2) resulta ser

$$P_n(x) = P_n(a) + P_n'(a)(x-a) + \frac{P_n''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \, . \tag{5.3}$$

Ahora bien, los polinomios son funciones con una estructura muy sencilla y operaciones algebráicas entre ellos así como su evaluación en un punto resultan ser tareas asequibles, hecho no tan obvio para una función cualquiera. En las secciones que siguen, vamos a ver cómo podemos aproximar, cerca de un punto dado, una función real suficientemente regular mediante un polinomio.

5.2. El polinomio de Taylor

Comencemos con un ejemplo y consideremos la función $f(x) = e^x$ para valores de x cercanos al punto $a = 0$. Como vimos anteriormente, el polinomio de grado $n = 1$ 'más similar' a una función f cerca de un punto es la recta tangente a la gráfica de f en ese punto, cuya ecuación en nuestro ejemplo es

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = 1 + x \, .$$

Notése que P_1 verifica $P_1(0) = f(0)$ y $P_1'(0) = f'(0)$. Una aproximación 'mejor' se obtendría, siguiendo la misma idea, si el polinomio y la función tuvieran también la misma derivada segunda en $a = 0$. En este caso, tendríamos el polinomio de grado $n = 2$

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2} \, ,$$

que cumple además $P_2''(0) = f''(0)$ (veáse Figura 5.1). De esta manera, podríamos construir polinomios de grado mayor que aproximan cada vez 'mejor' la función $f(x) = e^x$ con x cerca de $a = 0$. En general, *el polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$ que 'mejor' aproxima una función f cerca de un punto $a \in \mathbb{R}$ es aquel polinomio cuyas derivadas de orden $0, 1, \ldots, n$ en $x = a$ son iguales a las derivadas de f del mismo orden en ese punto* [1].

Definición 37 *Sea f una función n veces derivable en $a \in \mathbb{R}$. Se llama polinomio de Taylor de grado $n \in \mathbb{N}$ para f centrado en $x = a$ el polinomio de la forma*

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \, , \tag{5.4}$$

que cumple $P_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ con $k = 0, \ldots, n$.

[1] Nótese que $f^{(0)}(a) \equiv f(a)$.

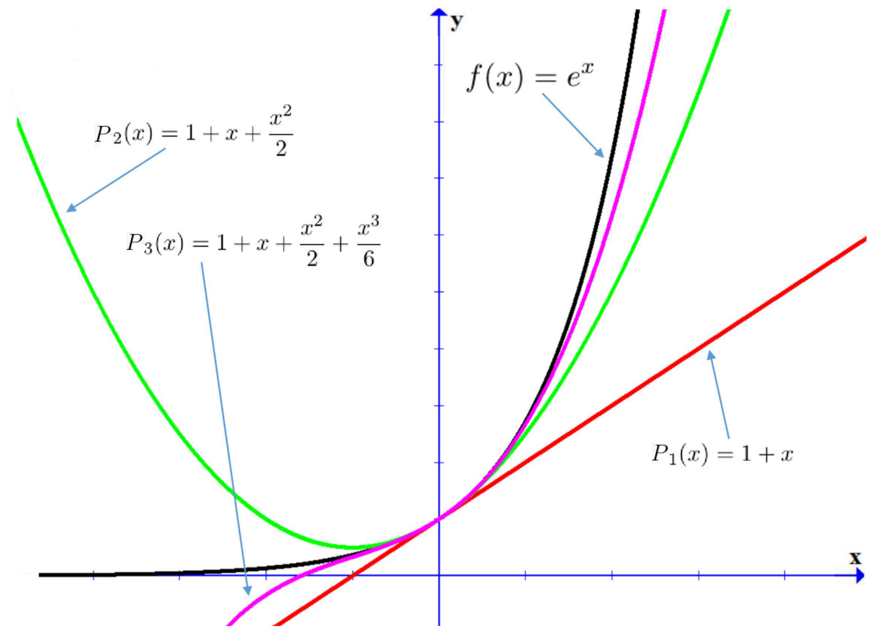

Figura 5.1: Aproximación mediante polinomios de la función $f(x) = e^x$ para valores de x cerca del punto $a = 0$.

NOTAS.

- Obsérvese la similitud entre (5.3) y (5.4): si f es un polinomio de grado n, entonces su polinomio de Taylor de grado n (centrado en un cierto $a \in \mathbb{R}$) coincide con la propia f.
- El polinomio (5.4) para $a = 0$ toma el nombre de *polinomio de Maclaurin* de grado n para f y se indica simplemente con P_n.
- El error que se comete al aproximar f con $P_{n,a}$ en un punto x cerca de a se llama *resto de Taylor* de orden n para f en a y se define

$$R_{n,a}(x) \;=\; f(x) - P_{n,a}(x)\,.$$

Ejemplo. Sea $f(x) = \cos(x)$ y $a = 0$. Tenemos que $P_4(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24$ y $R_4(x) = \cos(x) - (1 - x^2/2 + x^4/24)$.

Si aproximamos $f(x)$ mediante $P_{n,a}(x)$, el siguiente *Teorema de Taylor* nos permite cuantificar el resto de Taylor definido arriba, dándonos información sobre cómo expresar su valor en un punto x cerca de a.

Teorema 39 ***(forma de Lagrange del resto)*** *Sea f una función definida en $[\alpha,\beta]$ tal que $f^{(n)}$ es continua en $[\alpha,\beta]$ y $f^{(n+1)}$ existe en (α,β), con $n\in\mathbb{N}$. Entonces, dados a, $x\in[\alpha,\beta]$, con $x\neq a$, tenemos que*

$$R_{n,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,, \tag{5.5}$$

donde $c\in(a,x)$ si $x>a$ (o $c\in(x,a)$ si $x<a$).

NOTAS.

- Para $n=0$ el teorema anterior se reduce al Teorema del valor medio de Lagrange (veáse el Teorema 36).
- Fijado x cerca de a, el resto de Taylor depende de $f^{(n+1)}(c)$, cuyo valor es desconocido siendo el punto c indeterminado. Por tanto, la formula (5.5) no sirve para calcular exactamente $R_{n,a}(x)$, pero es útil para encontrar una estimación de su valor.
- Si $f^{(n+1)}$ es una función acotada, el resto de Taylor decrece al considerar más términos en el polinomio de Taylor usado en la aproximación o cuando el valor de x está más cerca de a.
- Si $|f^{(n+1)}(c)|\leq M$, con $M\in\mathbb{R}$, podemos estimar el resto de Taylor en x, concretamente
$$|R_{n,a}(x)|\;\leq\;\frac{M}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1}\,.$$
- Si $f^{(n+1)}$ es acotada, entonces podemos escribir
$$\lim_{x\to a}R_{n,a}(x)\;=\;\lim_{x\to a}\frac{R_{n,a}(x)}{x-a}\;=\;\lim_{x\to a}\frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^2}\;=\;\ldots\;=\;\lim_{x\to a}\frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n}\;=\;0$$
$$\Longrightarrow\quad\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n,a}(x)}{(x-a)^n}\;=\;0\,. \tag{5.6}$$

El Cuadro 5.1 muestra los polinomios de Maclaurin ($a=0$) de grado $n\in\mathbb{N}$ y los correspondientes restos para algunas funciones elementales [2]. Se observe como el

[2]Notése que en el polinomio de Maclaurin de $(1+x)^r$ se considera la fórmula *generalizada* del coeficiente binomial dada por

$$\binom{r}{n}\;=\;\frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)}{n!}\,,$$

donde r puede ser un número real cualquiera.

polinomio de Taylor hereda localmente las propiedades de f: por ejemplo, $\operatorname{sen}(x)$ y su polinomio de Taylor son impares, mientras que $\cos(x)$ y su polinomio de Taylor son pares.

$f(x)$	polinomio de Maclaurin	resto	notas
e^{x}	$P_n(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$	$R_n(x) = \dfrac{e^{c}}{(n+1)!}\, x^{n+1}$	
$\operatorname{sen}(x)$	$P_n(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$R_n(x) = \dfrac{(-1)^{k+1}\cos(c)}{(2k+3)!}\, x^{2k+3}$	$n = 2k+1$
$\cos(x)$	$P_n(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$	$R_n(x) = \dfrac{(-1)^{k+1}\cos(c)}{(2k+2)!}\, x^{2k+2}$	$n = 2k$
$\ln(1+x)$	$P_n(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$	$R_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}}\, x^{n+1}$	
$\arctan(x)$	$P_n(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$		$n = 2k+1$
$(1+x)^r$	$P_n(x) = 1 + \binom{r}{1} x + \binom{r}{2} x^2 + \ldots + \binom{r}{n} x^n$		$r \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1-x}$	$P_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$		

Cuadro 5.1: Polinomios de Maclaurin de grado $n \in \mathbb{N}$ y correspondientes restos para algunas funciones elementales.

Ejemplo. Queremos aproximar el valor $(1{,}1)^{1/3}$ usando un polinomio de Taylor de grado 3 y estimar el error involucrado. Se observe que $(1{,}1)^{1/3} = (1 + 0{,}1)^{1/3}$ puede obtenerse de forma exacta considerando el valor de la función $f(x) = (1 + x)^{1/3}$ en $x = 0{,}1$. Por otra parte, fijado $a = 0$, dicha función puede expresarse como $f(x) = P_3(x) + R_3(x)$, donde P_3 es su polinomio de Maclaurin de grado 3 y R_3 es el resto correspondiente. Para construir P_3 necesitamos f y sus derivadas hasta orden 3 evaluadas en $x = a = 0$, esto es

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{\frac{1}{3}} &\Longrightarrow\quad & f(0) = 1\,,\\
f'(x) &= \frac{1}{3}\,(1+x)^{-\frac{2}{3}} &\Longrightarrow\quad & f'(0) = \frac{1}{3}\,,\\
f''(x) &= -\frac{2}{9}\,(1+x)^{-\frac{5}{3}} &\Longrightarrow\quad & f''(0) = -\frac{2}{9}\,,\\
f'''(x) &= \frac{10}{27}\,(1+x)^{-\frac{8}{3}} &\Longrightarrow\quad & f'''(0) = \frac{10}{27}\,.
\end{aligned}
$$

Entonces $P_3(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3$ y aproximamos el valor deseado como

$$(1{,}1)^{\frac{1}{3}} = f(0{,}1) \approx P_3(0{,}1) = 1 + \frac{0{,}1}{3} - \frac{(0{,}1)^2}{9} + \frac{5(0{,}1)^3}{81} \approx 1{,}03228395\,.$$

Teniendo en cuenta que $f^{(4)}(x) = -\frac{80}{81}(1+x)^{-\frac{11}{3}}$, el resto de Taylor en $x = 0{,}1$ es

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 = -\frac{80}{81}\frac{(1+c)^{-\frac{11}{3}}}{4!}x^4 \implies R_3(0{,}1) = -\frac{80}{81}\frac{(1+c)^{-\frac{11}{3}}}{4!}(0{,}1)^4\,,$$

donde $0 < c < 0{,}1$. Por tanto podemos estimar el error de aproximación cometido mediante

$$|(1{,}1)^{\frac{1}{3}} - P_3(0{,}1)| = |R_3(0{,}1)| < \frac{80}{81}\frac{(0{,}1)^4}{4!} < \frac{1}{2}10^{-5}\,,$$

donde la primera desigualdad se obtiene observando que $(1+c)^{11/3} > 1$. Así pues, la aproximación obtenida proporciona 5 cifras decimales exactas.

5.3. Cálculo de límites indeterminados

El polinomio de Taylor puede ser útil a la hora de calcular el valor de ciertos límites del tipo $x \to a$ (o $x \to a^{\pm}$), con $a \in \mathbb{R}$, cuando aparecen formas de indeterminación. Antes de ver cómo, necesitamos introducir una nueva notación.

Definición 38 *Sean f y g dos funciones definidas para todo x en un entorno de $a \in \mathbb{R}$, con $g(x) \neq 0$ si $x \neq a$. Entonces, decimos que 'f es o-pequeña de g' y escribimos $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \to a$ si*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,. \tag{5.7}$$

NOTAS.

- La definición anterior es válida también si $x \to a^{\pm}$ en (5.7).
- Si $f(x) = \mathrm{o}(x^n)$, con $n \in \mathbb{N}$, entonces según la Definición 38 podemos pensar en $f(x)$ como en una función que dividida por x^n se anula en el límite indicado; en otras palabras, podemos considerar $f(x)$ como una 'expresión' definida en términos de potencias x^s con $s > n$.
- Valen las siguientes propiedades ($m, n \in \mathbb{N}$).

(*i*) $x^m = \mathrm{o}(x^n)$, si $m > n$.

(*ii*) $f(x) = \mathrm{o}(x^m) \implies f(x) = \mathrm{o}(x^n)$, si $m > n$.

(*iii*) $x^m\,\mathrm{o}(x^n) = \mathrm{o}(x^{m+n})$.

(*iv*) $\mathrm{o}(x^m)\,\mathrm{o}(x^n) = \mathrm{o}(x^{m+n})$.

En las hipótesis del Teorema 39, si f es una función tal que $f^{(n+1)}$ está acotada, usando la Definición 38 y el resultado en (5.6), podemos escribir

$$R_{n,a}(x) = \mathrm{o}([x-a]^n) \iff f(x) = P_{n,a}(x) + \mathrm{o}([x-a]^n)\,. \tag{5.8}$$

Así pues, cuando f se aproxima mediante su polinomio de Taylor de grado n centrado en a, sabemos que el *error de aproximación* cometido (el resto correspondiente) es una cantidad despreciable cuando $x \to a$, esto es tiende a cero si la dividimos por $(x-a)^n$ con $x \to a$. En esta idea se basa el cálculo de límites usando el polinomio de Taylor: dado un límite indeterminado con $x \to a$ (o $x \to a^{\pm}$), $a \in \mathbb{R}$, se sustituyen las funciones involucradas (que lo admiten) con expresiones del tipo (5.8) tal que, después de apropiadas simplificaciones, se pueda hallar el valor del límite.

Ejemplo. Calculamos $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x}}{\operatorname{sen}(x)}$.

Aproximamos las funciones involucradas con algunos términos de sus polinomios de Taylor en $a = 0$, esto es

$$\cos(x) = 1 + \mathrm{o}(x)\,, \quad \sqrt{1-x} = [1 + (-x)]^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x)\,, \quad \operatorname{sen}(x) = x + \mathrm{o}(x)\,.$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en el límite dado se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x}}{\operatorname{sen}(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \mathrm{o}(x) - \left[1 - \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x)\right]}{x + \mathrm{o}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{2} + \mathrm{o}(x)}{x + \mathrm{o}(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{o}(x)}{x}}{1 + \frac{\mathrm{o}(x)}{x}} = \frac{1}{2}\,, \end{aligned}$$

porque $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{o}(x)}{x} = 0$ por definición.

En general, el grado a considerar para cada polinomio de Taylor depende del caso. La idea es usar un número suficiente de términos tal que las expresiones resultantes puedan simplificarse y el cálculo del límite pueda desarrollarse. Por otra parte, retener más términos de lo necesario no suele ser un impedimento a la resolución del problema. Notése que, en muchos casos, el polinomio de Taylor es un instrumento más eficaz que la regla de l'Hôpital, aunque ésta puede aplicarse en límites del tipo $x \to \pm\infty$ (en algún caso el polinomio de Taylor podría ser útil también, después de aplicar el cambio de variable $t = 1/x$) o cuando los polinomios de Taylor de las funciones involucradas no se conocen (o es difícil construirlos).

Ejemplo. Calculamos $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x) - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$.

Usando el polinomio de Maclaurin de grado 5 de $\operatorname{sen}(x)$, podemos escribir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^5) - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^5)}{x^5} \\ &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{120} + \frac{\mathrm{o}(x^5)}{x^5} \right) = \frac{1}{120},\end{aligned}$$

porque $\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{o}(x^5)}{x^5} = 0$ por definición.

5.4. Serie de Taylor

En la Definición 37, el polinomio de Taylor de grado $n \in \mathbb{N}$ de una función se define mediante un número finito de términos, más concretamente $n + 1$. Si ahora consideramos infinitos términos, obtenemos una suma infinita de potencias de $x - a$, esto es una *serie de potencias* centrada en a, con $a \in \mathbb{R}$ [3].

Definición 39 *Sea f una función derivable en $a \in \mathbb{R}$ infinitas veces, con todas sus derivadas continuas en un entorno de a. La serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \tag{5.9}$$

se llama serie de Taylor de f centrada en $x = a$.

Notas.

- La suma parcial n-esima de (5.9) coincide con $P_{n,a}(x)$.

[3] Una serie de potencias centrada en $a \in \mathbb{R}$ es una serie de funciones cuyos términos son del tipo $a_k\,(x - a)^k$, con $a_k \in \mathbb{R}$. Podemos verla como una serie de números reales para cada $x \in \mathbb{R}$ fijo que consideremos.

- Dependiendo del valor de $x \in \mathbb{R}$, una serie de Taylor puede ser convergente o no. Si converge, podemos pensar en (5.9) como en una función cuyo dominio consiste en el conjunto I_c de valores de x para los cuales la serie converge. En particular, a pertenece al dominio ya que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(a-a)^k = f(a) \in \mathbb{R}$.
- En general, demostrar la convergencia de la serie de Taylor de una función dada no es tarea fácil y va más allá de los objetivos de este curso. El Cuadro 5.2 muestra las series de Taylor centradas en $a = 0$ de algunas funciones elementales y los correspondientes intervalos de convergencia I_c. Se observe que de las series de Taylor conocidas podemos deducir muchas otras mediante simples operaciones (por ejemplo, la serie de Taylor de $\operatorname{sen}(3x^2)$ se construye cambiando x por $3x^2$ en el término general de la serie de Taylor de $\operatorname{sen}(x)$).

$f(x)$	serie de Taylor	I_c
$e^{\,x}$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sen}(x)$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$\mathbb{R}$
$\ln(1+x)$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$	$(-1, 1]$
$\arctan(x)$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$	$[-1, 1]$
$(1+x)^r$, $r \in \mathbb{R}$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k$	$(-1, 1)$
$\dfrac{1}{1-x}$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k$	$(-1, 1)$

Cuadro 5.2: Series de Taylor centradas en $a = 0$ y correspondientes intervalos de convergencia para algunas funciones elementales.

Estamos interesados en los valores de $x \in I_c$ tales que la serie de Taylor de f converge al valor de $f(x)$ (ya vimos que $x = a$ cumple esta condición), esto es

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k\,.$$

Dado que $f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$, entonces $x \in I_c$ es uno de los valores buscados si $R_{n,a}(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. En otras palabras, decimos que f coincide con su serie de Taylor para aquellos valores de x en los que la serie converge y el resto de Taylor tiende a cero cuando $n \to \infty$.

Definición 40 *Decimos que una función f es analítica en $a \in \mathbb{R}$ si f coincide con su serie de Taylor centrada en $x = a$ en un entorno de a.*

NOTAS.

- Todas las funciones del Cuadro 5.2 son analíticas en $a = 0$.
- Una función f con infinitas derivadas continuas y con una serie de Taylor convergente $\forall x \in \mathbb{R}$ puede no ser analítica en algún punto (considérese, por ejemplo, la función definida por $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$, y el punto $a = 0$).

Ejemplo. Sea $f(x) = e^x$ y $a \in \mathbb{R}$ arbitrario. Usando que $f^{(k)}(x) = e^x$ para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$, se tiene que

$$e^x = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x) = e^a + e^a(x-a) + \ldots + \frac{e^a}{n!}(x-a)^n + \frac{e^c}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

con $c \in (a, x)$ o (x, a), $n \in \mathbb{N}$. Tomando el límite $n \to \infty$, se obtiene que

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^a}{k!}(x-a)^k + e^c \lim_{n\to\infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ahora, recordando la fórmula de Stirling (veáse el Teorema 8)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1,$$

tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x-a)^n}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 0,$$

por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Así pues

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^a}{k!}(x-a)^k$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ arbitrario. En otras palabras, e^x es una función analítica en cualquier punto a de la recta real.