uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

CÁLCULO

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Índice general

Capítulo 6

Comportamiento local y global de una función real

6.1. Extremos de una función

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$, cerrado y acotado. Gracias a estas hipótesis, el Teorema de Weierstrass (Teorema 28) asegura que existen puntos $x \in [a, b]$ donde f alcanza su valor máximo y su valor mínimo [1]. El objetivo de este capítulo es introducir las nociones necesarias para poder encontrar dichos puntos (si existen), bien 'localmente' bien 'globalmente'. Primero, conviene aclarar algunos conceptos importantes.

Definición 41 *Sea $x_0 \in (a, b)$. Entonces*

- *f tiene máximo local (relativo) en x_0 si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo x que cumple $|x - x_0| < \delta$;*
- *f tiene mínimo local (relativo) en x_0 si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo x que cumple $|x - x_0| < \delta$.*

Definición 42 *Sea $x_0 \in [a, b]$. Entonces*

- *f tiene máximo global (absoluto) en x_0 si $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in [a, b]$;*
- *f tiene mínimo global (absoluto) en x_0 si $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in [a, b]$.*

[1] Si la función f no es continua y/o el intervalo considerado no es cerrado/acotado, entonces el valor máximo y el valor mínimo de f pueden no existir.

Notas.

- Máximo y mínimo de f toman el nombre de *extremos* de f.
- Si x_0 es un punto de extremo global entonces es también un punto de extremo local, pero no viceversa.
- El número de puntos donde f alcanza sus extremos (locales o globales) puede ser finito o infinito; además f puede alcanzar sus extremos globales en a o b.

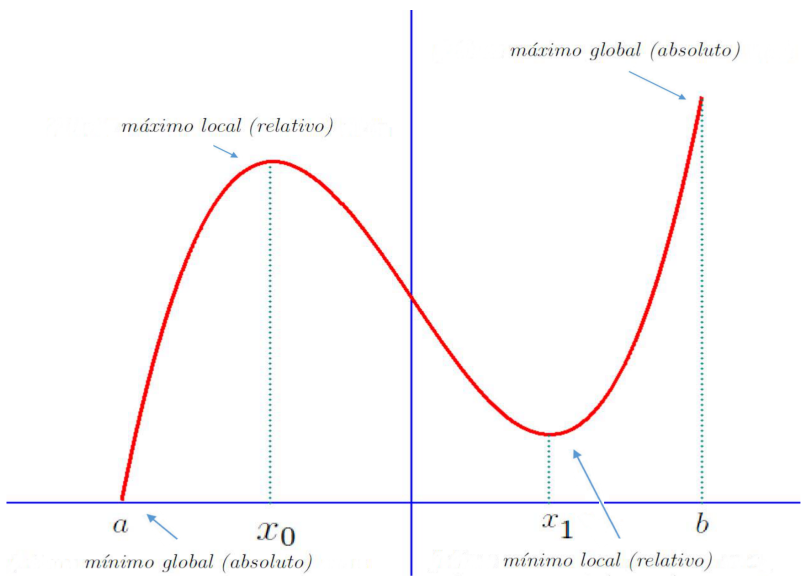

Figura 6.1: Extremos locales y globales de una función.

6.2. Comportamiento local

Sea f una función derivable en (a, b). Recordamos que si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces f es estrictamente creciente en dicho intervalo, mientras que si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces f es estrictamente decreciente en dicho intervalo. Por otro lado, si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces f es constante en dicho intervalo (veáse el Teorema 34). Tales propiedades valen también si el intervalo considerado no es acotado.

Teorema 40 *Si una función f es derivable y tiene un extremo local en $x_0 \in (a, b)$, entonces $f'(x_0) = 0$.*

En general, la implicación contraria es falsa. En otras palabras, podemos encontrar casos donde f tiene derivada primera nula en un punto pero éste no es un punto de extremo local (por ejemplo, $f(x) = x^3$ con $x_0 = 0$). Los puntos donde f' se anula (*puntos críticos*) son entonces los candidatos a ser los puntos donde f alcanza sus extremos locales. El teorema siguiente nos da condiciones suficientes para decidir si un punto crítico es efectivamente de extremo local.

Teorema 41 *Sea f una función dos veces derivable en $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.*

- *Si $f''(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en x_0.*
- *Si $f''(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo local en x_0.*

Se observe que si $f''(x_0) = 0$ entonces el Teorema 41 no es concluyente: para decidir sobre la naturaleza del punto x_0 hay que recurrir a las derivadas de orden superior de f (véase Sección 6.3).

Ejemplo. Sea $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Sus puntos críticos son los valores $x \in \mathbb{R}$ tales que $f'(x) = 3(x^2 - 1) = 0$, esto es $x = 1$ y $x = -1$. Además, siendo $f''(x) = 6x$, podemos concluir que $x = 1$ es un punto de mínimo local ($f''(1) > 0$) mientras que $x = -1$ es un punto de máximo local ($f''(-1) < 0$).

Definición 43 *Una función f es concava hacia arriba (hacia abajo) en (a, b) si el segmento que une los puntos del plano con coordenadas $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$ pasa por encima (por debajo) de la gráfica de f, para todo x, $y \in (a, b)$. Un punto donde f cambia de ser concava hacia arriba a concava hacia abajo (o viceversa) se llama punto de inflexión.*

Teorema 42 *Sea f una función dos veces derivable en (a, b).*

- *Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es concava hacia arriba en (a, b).*
- *Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es concava hacia abajo en (a, b).*
- *Si $x_0 \in (a, b)$ es un punto de inflexión, entonces $f''(x_0) = 0$.*

NOTAS.

- Si f es concava hacia arriba (hacia abajo) en (a, b), entonces f' es una función creciente (decreciente) en dicho intervalo. Un punto de inflexión es por tanto un punto donde f' alcanza un extremo local.

- Podemos encontrar casos donde f tiene derivada segunda nula en un punto pero éste no es un punto de inflexión (por ejemplo, $f(x) = x^4$ con $x_0 = 0$).
- En el ejemplo de la Figura 6.1, la función f es concava hacia abajo en un entorno del punto x_0 y concava hacia arriba en un entorno del punto x_1.

6.3. Comportamiento local y polinomio de Taylor

Todas las ideas vistas en la sección anterior, se generalizan gracias al polinomio de Taylor, que nos da toda la información sobre el comportamiento local de una función 'alrededor' de un punto crítico. Sea f una función infinitas veces derivable en $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$ y sea p el orden de la primera derivada de f que no se anula en x_0 ($p > 1$). Por tanto, usando el polinomio de Taylor de grado p para f centrado en x_0, podemos escribir

$$f(x) \;=\; f(x_0) + \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}\,(x - x_0)^p + \mathrm{o}((x - x_0)^p)\,, \tag{6.1}$$

donde vamos a considerar $x \in I = \{\, x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\,,\ \text{con}\ \ \delta > 0\,\}$. Gracias a la estructura de (6.1), podemos distinguir los siguientes casos.

- Si p es par y $f^{(p)}(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en x_0 y es concava hacia arriba en I.
- Si p es par y $f^{(p)}(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo local en x_0 y es concava hacia abajo en I.
- Si p es impar y $f^{(p)}(x_0) > 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en x_0 y es estrictamente creciente en I.
- Si p es impar y $f^{(p)}(x_0) < 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en x_0 y es estrictamente decreciente en I.

Ejemplo. Estudiamos el comportamiento local de $f(x) = x^7 \operatorname{sen}^4(x)$ en un entorno del punto $x_0 = 0$. Usando el polinomio de Maclaurin de grado 3 para $\operatorname{sen}(x)$, tenemos que

$$f(x) = x^7 \left[x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)\right]^4 \;=\; x^{11}\left[1 - \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^2)\right]^4 \;=\; x^{11} + \mathrm{o}(x^{11})\,.$$

Siendo el coeficiente de x^{11} igual a 1, podemos deducir que la primera derivada de f que no se anula en $x_0 = 0$ es de orden $p = 11$ (impar) y es positiva. Por tanto, f

tiene un punto de inflexión en $x_0 = 0$ y es estrictamente creciente en un entorno de dicho punto.

Ejemplo. Estudiamos el comportamiento local de $f(x) = \cos^3(x)\ln^2(1+x)$ en un entorno del punto $x_0 = 0$. Usando polinomios de Maclaurin adecuados, tenemos que

$$f(x) = \left[1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\right]^3 \left[x + \mathrm{o}(x)\right]^2 = x^2 + \mathrm{o}(x^2)\,.$$

Siendo el coeficiente de x^2 igual a 1, podemos deducir que la primera derivada de f que no se anula en $x_0 = 0$ es de orden $p = 2$ (par) y es positiva. Por tanto, f tiene un mínimo local en $x_0 = 0$ y es concava hacia arriba en un entorno de dicho punto.

6.4. Comportamiento global

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$, cerrado y acotado. Los puntos $x \in [a, b]$ donde f alcanza sus extremos globales se pueden determinar mediante los pasos siguientes.

(*i*) Se calculan los puntos críticos de f en (a, b).

(*ii*) Si existen, se hallan los puntos en (a, b) donde f no es derivable.

(*iii*) Se consideran los puntos $x = a$ y $x = b$.

(*iv*) Se evalúa f en todos los puntos definidos en los pasos (*i*), (*ii*) y (*iii*).

(*v*) Los puntos donde f tiene los valores mayor y menor, entre los calculados en el paso (*iv*), son los puntos de máximo global y mínimo global, respectivamente.

Ejemplo. Buscamos los extremos globales de $f(x) = 2x^{5/3} + 5x^{2/3}$ en el intervalo $[-2, 1]$. Siendo

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{2/3} + \frac{10}{3}x^{-1/3} = \frac{10}{3}\,\frac{x+1}{x^{1/3}}\,,$$

para todo $x \neq 0$, el único punto crítico de f en $(-2, 1)$ es $x = -1$. Además es fácil ver que f no es derivable en $x = 0$. Teniendo en cuenta los extremos del intervalo considerado, esto es $x = -2$ y $x = 1$, calculamos

$$f(-1) = 3\,,\quad f(0) = 0\,,\quad f(-2) = 4^{1/3}\,,\quad f(1) = 7\,.$$

Comparando los valores obtenidos, podemos concluir que f tiene su mínimo global en $x = 0$ y su máximo global en $x = 1$.