

CÁLCULO

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero



Índice general

1. Conjuntos de números	3
1.1. Números naturales	3
1.2. Números enteros	6
1.3. Números racionales e irracionales	6
1.4. Números reales	7
1.4.1. Propiedades de los números reales	8
1.5. Números complejos	11
 2. Sucesiones y series de números reales	 13
2.1. Sucesiones de números reales	13
2.1.1. Cálculo de límites de sucesiones	17
2.1.2. Sucesiones recurrentes	21
2.2. Series de números reales	22
2.2.1. Series de términos positivos	25
2.2.2. Series de términos cualesquiera y series alternadas	29
 3. Funciones reales: límites y continuidad	 31
3.1. Conceptos generales	31
3.2. Límite de una función real	35
3.3. Propiedades de los límites	38
3.4. Continuidad de funciones reales	38
3.5. Teoremas sobre funciones continuas	42

4. Funciones reales: derivabilidad	45
4.1. Introducción	45
4.2. Interpretación geométrica	46
4.3. Interpretación física	47
4.4. Funciones derivables	47
4.5. Reglas de derivación	50
4.6. Teoremas sobre funciones derivables	53
4.7. Funciones potencia	56
5. Polinomio de Taylor	63
5.1. Introducción	63
5.2. El polinomio de Taylor	64
5.3. Cálculo de límites indeterminados	68
5.4. Serie de Taylor	70
6. Comportamiento local y global de una función real	73
6.1. Extremos de una función	73
6.2. Comportamiento local	74
6.3. Comportamiento local y polinomio de Taylor	76
6.4. Comportamiento global	77
7. Integración: teoremas fundamentales y técnicas	79
7.1. Integral definida	79
7.2. Teoremas Fundamentales del Cálculo	84
7.3. Técnicas de integración	87
7.3.1. Integración por partes	88
7.3.2. Integración de funciones racionales	89
7.3.3. Integración por cambio de variable	93
7.3.4. Integración de funciones trigonométricas	95
7.3.5. Integración de funciones irracionales	97

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	1
-----------------------	---

8. Integrales impropias	101
8.1. Integrales impropias de primera especie	102
8.1.1. Criterios de convergencia	104
8.2. Integrales impropias de segunda especie	106

Capítulo 7

Integración: teoremas fundamentales y técnicas

7.1. Integral definida

En este apartado, vamos a concretar el concepto de integración en $\mathbb{R}$; para ello, necesitamos los siguientes ingredientes.

- Un intervalo $[a, b]$, cerrado y acotado;
- Una función real acotada definida en dicho intervalo, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; por tanto se cumple que $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a, b]$, siendo m y M constantes.

Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud, que denominamos $\Delta_n = (b - a)/n$.

NOTA. Tomamos los subintervalos con la misma longitud para simplificar los cálculos, pero toda la teoría que sigue es válida si tomamos subintervalos con diferentes longitudes sin más que adaptar la notación.

Ahora, consideramos los términos (ambos bien definidos)

$$\begin{aligned} m_k(n) &= \inf \{ f(x) : a + (k-1)\Delta_n \leq x \leq a + k\Delta_n \}, \\ M_k(n) &= \sup \{ f(x) : a + (k-1)\Delta_n \leq x \leq a + k\Delta_n \}, \end{aligned}$$

donde $k = 1, \dots, n$, y a partir de ellos construimos las llamadas *sumas de Riemann*, esto es

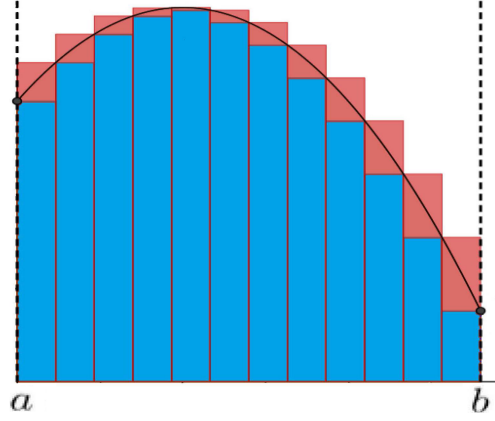


Figura 7.1: Esquema sobre la construcción de la integral definida de una función (gráfica negra) en un intervalo $[a, b]$: en color azul y rojo se muestran las sumas de Riemann inferior y superior, respectivamente, donde $n = 12$.

$$I_n(f, a, b) = \sum_{k=1}^n m_k(n) \Delta_n \quad (\text{suma inferior}),$$

$$S_n(f, a, b) = \sum_{k=1}^n M_k(n) \Delta_n \quad (\text{suma superior}).$$

Notése que los términos de las sucesiones $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dependen de f , a y b . Finalmente, podemos definir cuándo la función f es *integrable* y decir cuál es el valor de su *integral definida* en el intervalo $[a, b]$.

Definición 44 Se dice que f es integrable en el intervalo $[a, b]$ si existen los límites siguientes y coinciden, esto es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f, a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, a, b).$$

En este caso, el símbolo $\int_a^b f(t) dt$ se define como

$$(7.1) \quad \int_a^b f(t) dt := \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f, a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, a, b),$$

y se denomina *integral definida* de f en el intervalo $[a, b]$.

Se observe que la variable t usada en la definición anterior es una ‘variable muda’ y no juega ningún papel; en su lugar, podemos usar cualquier otro símbolo excepto aquellos que correspondan a las funciones y constantes que estamos empleando en la propia definición.

De la Definición 44 se deduce el significado geométrico de la integral (7.1).

- Si f es positiva en todo el intervalo $[a, b]$, entonces el valor de $\int_a^b f(t) dt$ coincide con el área de la región plana limitada por la gráfica de la función, el eje x y las rectas de ecuaciones $x = a$ y $x = b$ (véase el esquema de la izquierda en la Figura 7.2).
- En general, el valor de $\int_a^b f(t) dt$ representa la diferencia entre las áreas de las regiones planas que quedan por encima y por debajo del eje x , según se muestra en el esquema de la derecha en la Figura 7.2.

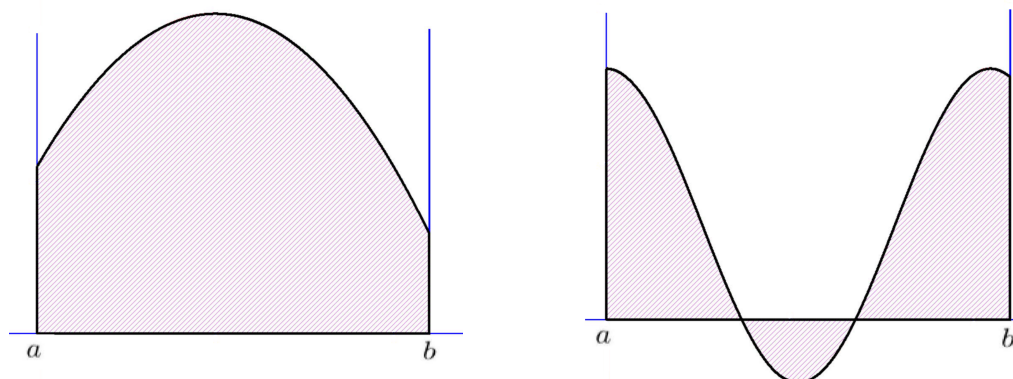


Figura 7.2: Significado geométrico de la integral (7.1).

Por otro lado, hay que tener en cuenta que el cálculo de $\int_a^b f(t) dt$ es, en general, muy difícil si aplicamos directamente la Definición 44, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Sea $f(x) = x^2$ definida en el intervalo $[a, b] = [0, 1]$. En este caso, se tiene que $\Delta_n = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$, $m_k(n) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2$ y $M_k(n) = \left(\frac{k}{n}\right)^2$, con $k = 1, \dots, n$. Por tanto las sumas de Riemann son

$$I_n(f, 0, 1) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k-1)^2,$$

$$S_n(f, 0, 1) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2.$$

Aplicando el resultado conocido

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

obtenemos $I_n = (n-1)n(2n-1)/(6n^3)$ y $S_n = n(n+1)(2n+1)/(6n^3)$. Así pues

$$\int_0^1 t^2 dt = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f, 0, 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, 0, 1) = \frac{1}{3}$$

y $f(x) = x^2$ es integrable en $[0, 1]$.

Sin embargo, gracias a la Definición 44, es posible demostrar las siguientes propiedades que serán muy útiles a la hora de abordar problemas más complejos.

Teorema 43 Sean f , f_1 y f_2 funciones integrables en el intervalo $[a, b]$.

(i) La función $c_1 f_1 + c_2 f_2$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$) es integrable en $[a, b]$ y se cumple que

$$\int_a^b [c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] dt = c_1 \int_a^b f_1(t) dt + c_2 \int_a^b f_2(t) dt.$$

(ii) Si $f_1 \leq f_2$ en todo el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f_1(t) dt \leq \int_a^b f_2(t) dt.$$

(iii) Si $m \leq f \leq M$ en todo el intervalo $[a, b]$ ($m, M \in \mathbb{R}$), entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a).$$

(iv) La función $|f|$ es integrable en $[a, b]$ y se cumple que

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

(v) Si f es impar e integrable en el intervalo $[-a, a]$, entonces

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0.$$

(vi) Si f es par e integrable en el intervalo $[-a, a]$, entonces

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt.$$

(vii) Se cumple que $\int_a^a f(t) dt = 0$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

(viii) Para todo $c \in [a, b]$, se cumple que

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Ejemplos.

- $\int_{-1}^1 \operatorname{sen}(t) dt = 0$, por el Teorema 43-(v).
- $\int_{-1}^1 t^2 dt = 2 \int_0^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$, por el Teorema 43-(vi).
- Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ 3 & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

La función f es integrable ya que es acotada y continua a trozos en el intervalo $[-1, 2]$ (véase el Teorema 45 más abajo), pues las funciones $g(x) = \operatorname{sen}(x)$, $h(x) = 3$ son continuas y f tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 1$. Por tanto

$$\int_{-1}^2 f(t) dt = \int_{-1}^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt = \int_{-1}^1 \operatorname{sen}(t) dt + \int_1^2 3 dt = 3.$$

En el cálculo anterior hemos aplicado el Teorema 43-(viii) y (v).

Los siguientes teoremas nos garantizan que, en la práctica, casi nunca nos encontraremos con funciones no integrables.

Teorema 44 Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$ y por tanto existe $\int_a^b f(t) dt$.

Teorema 45 Si f es una función acotada y continua a trozos en el intervalo $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$ y por tanto existe $\int_a^b f(t) dt$.

NOTA. Una función es acotada y *continua a trozos* en un intervalo cuando es continua en todos los puntos del intervalo salvo para un conjunto finito de puntos donde la función tiene discontinuidades de salto finito.

También existen funciones integrables con un número infinito de discontinuidades de salto finito. El siguiente ejemplo muestra una función no integrable, con objeto de aclarar aún más los conceptos introducidos.

Ejemplo. Sea f la función definida en el intervalo $[a, b]$ del siguiente modo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, b] \text{ es racional,} \\ 0 & \text{si } x \in [a, b] \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que las sumas de Riemann son $I_n = 0$ y $S_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto f no es integrable ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, a, b) = 1 \neq 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f, a, b)$.

7.2. Teoremas Fundamentales del Cálculo

Los siguientes teoremas se denominan ‘fundamentales’ porque describen la conexión entre dos conceptos básicos del Cálculo: la integral y la derivada. Además, como consecuencia muy importante, dichos teoremas nos permitirán calcular una integral sin necesidad de recurrir a la Definición 44.

Teorema 46 (*primer Teorema Fundamental del Cálculo*) Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Entonces, la función definida por

$$(7.2) \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

con $x \in [a, b]$, es continua en el intervalo $[a, b]$. Además, si f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces la función F tiene las siguientes propiedades:

- F es continua en el intervalo $[a, b]$;
- F es derivable en el intervalo (a, b) y su derivada es $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

NOTA. El Teorema 46 muestra que las funciones que se definen a partir de una integral adquieren mejores propiedades que las funciones que se integran. Se dice que la integral tiene un efecto ‘regularizador’ (véase Figura 7.3). Por otra parte, la derivada tiene el efecto contrario.

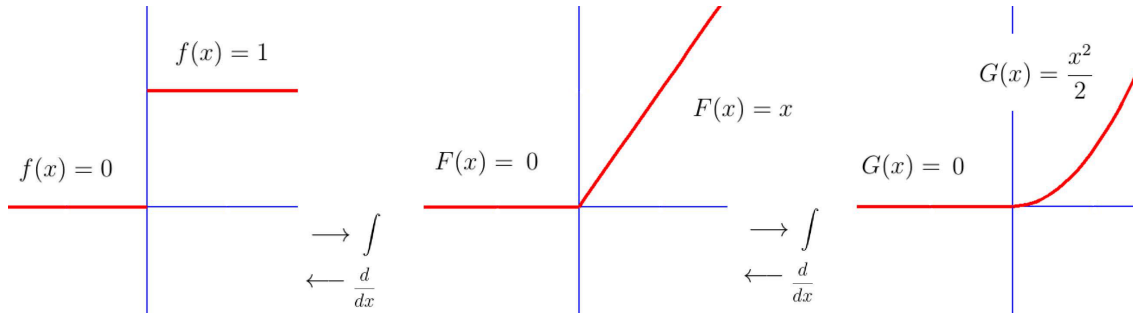


Figura 7.3: Ejemplo del efecto ‘regularizador’ de la integral.

NOTA. A la hora de aplicar el primer Teorema Fundamental del Cálculo no tenemos que preocuparnos de cómo están ordenados los valores de los extremos de integración, como muestra el siguiente razonamiento. Primero, si f es continua, entonces la función $G(x) = \int_x^b f(t) dt$, con $b > x$, cumple que $G'(x) = -f(x)$. En efecto, si $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, con $a < x$, tenemos que $F(x) + G(x) = \int_a^b f(t) dt$, cuyo lado derecho es independiente de x . Así pues, derivando se obtiene que

$$F'(x) + G'(x) = 0 \implies f(x) + G'(x) = 0 \implies G'(x) = -f(x).$$

Ahora, para tener en cuenta dicho signo negativo, definimos

$$\int_b^a f(t) dt := - \int_a^b f(t) dt$$

si $a < b$. Por tanto, si a fuera mayor que x en (7.2), seguimos teniendo que

$$F(x) = - \int_x^a f(t) dt \implies F'(x) = -[-f(x)] = f(x).$$

Ejemplo. Dada $F(x) = \int_a^x t^2 dt$, veamos que se cumple $F'(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ independientemente de si x es mayor o menor que $a \in \mathbb{R}$. En efecto, si $a < x$, entonces $F'(x) = x^2$ directamente aplicando el primer Teorema Fundamental del Cálculo. Si $a > x$, entonces $F(x) = -\int_x^a t^2 dt$ y por tanto $F'(x) = -[-x^2] = x^2$.

Para poder introducir el siguiente teorema, necesitamos un concepto más. Diremos que una función g es una *primitiva* de una función f en el intervalo (a, b) si, para todo $x \in (a, b)$, se verifica que $g'(x) = f(x)$.

Teorema 47 (*segundo Teorema Fundamental del Cálculo*) Si f es una función integrable en el intervalo $[a, b]$ y existe una función derivable g tal que $f(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, entonces

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a).$$

NOTAS.

- Si g es una primitiva de f , entonces cualquier función del tipo $g+k$, con $k \in \mathbb{R}$, también es una primitiva de f . En otras palabras, todas las primitivas de una función dada sólo difieren por una constante.
- El primer Teorema Fundamental del Cálculo garantiza que si una función f es continua en un intervalo $[a, b]$, entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es una primitiva de f en (a, b) .

El segundo Teorema Fundamental del Cálculo y las observaciones anteriores nos llevan a definir la noción de *integral indefinida* de una función f . Ya no tendremos ningún intervalo sino buscaremos la ‘familia’ de todas las (infinitas) primitivas de la función considerada.

Definición 45 Dada una función f integrable, llamamos *integral indefinida* de f al conjunto de todas sus primitivas y lo indicamos con $\int f(t) dt$.

Así pues, el segundo Teorema Fundamental del Cálculo permite calcular un buen número de integrales (definidas e indefinidas), simplemente buscando una primitiva de la función en cuestión.

Ejemplo. Las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3/3$ cumplen que $f(x) = g'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto $\int_a^b t^2 dt = g(b) - g(a) = b^3/3 - a^3/3$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. En

particular, se tiene que $\int_0^1 t^2 dt = 1/3$, como ya sabíamos previamente al aplicar la Definición 44 pero ahora sin hacer cálculos tediosos.

Ejemplo. $\int (t^5 + 3e^t) dt = \frac{t^6}{6} + 3e^t + k$, con $k \in \mathbb{R}$.

Acabamos esta sección con la *regla de Leibniz*, que nos dice cómo se derivan funciones dadas por integrales cuando los límites de integración son a su vez funciones.

Teorema 48 (regla de Leibniz) Sea f continua en el intervalo $[a, b]$. Dada la función

$$F(x) = \int_{A(x)}^{B(x)} f(t) dt,$$

donde A y B son dos funciones derivables en el intervalo (α, β) , con valores en $[a, b]$, se tiene que

$$F'(x) = f(B(x)) B'(x) - f(A(x)) A'(x),$$

para todo $x \in (\alpha, \beta)$.

Ejemplo. Calculamos la derivada de la función $F(x) = \int_{1+x^2}^{x^3} 1/(1+t^2) dt$. Dado que $f(t) = 1/(1+t^2)$ es continua para todo $t \in \mathbb{R}$, y que las funciones $A(x) = 1+x^2$ y $B(x) = x^3$ son derivables para todo $x \in \mathbb{R}$, aplicando la regla de Leibniz obtenemos

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^6} (3x^2) - \frac{1}{1+(1+x^2)^2} (2x) = \frac{3x^2}{1+x^6} - \frac{2x}{x^4+2x^2+2}.$$

Conociendo las derivadas de funciones definidas a través de integrales, podremos calcular de ellas muchas de las cosas que hemos estudiado hasta ahora: rectas tangentes, límites, polinomios de Taylor, extremos locales y globales, etc...

7.3. Técnicas de integración

En esta sección, analizamos distintas técnicas para calcular integrales definidas e indefinidas.

7.3.1. Integración por partes

La técnica de integración por partes es una de las más utilizadas. Está basada en la regla para derivar un producto de funciones, esto es

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

siendo u y v suficientemente regulares. Si los términos involucrados son integrables y calculamos la integral de la igualdad anterior en un intervalo $[a, b]$, obtenemos la *fórmula de integración por partes*

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx,$$

donde $[u(x)v(x)]_a^b \equiv u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

NOTA. Al aplicar la integración por partes, el sentido común dicta que la integral del lado derecho de la igualdad debería ser, en general, más fácil de calcular que la integral del lado izquierdo. Además, nuestra preocupación debe ser identificar las funciones u y v a la hora de aplicar esta técnica. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo. Calculamos la integral indefinida $\int x \operatorname{sen}(x) dx$. Tomemos $u(x) = x$ y $v'(x) = \operatorname{sen}(x)$; por tanto $u'(x) = 1$ y $v(x) = -\cos(x)$. Aplicando integración por partes se tiene que

$$\int x \operatorname{sen}(x) dx = -x \cos(x) - \int 1(-\cos(x)) dx = -x \cos(x) + \operatorname{sen}(x) + k,$$

siendo $k \in \mathbb{R}$.

Ejemplo. Calculamos la integral indefinida $\int \ln(x) dx$. Tomemos $u(x) = \ln(x)$ y $v'(x) = 1$; por tanto $u'(x) = 1/x$ y $v(x) = x$. Aplicando integración por partes se tiene que

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln(x) - x + k,$$

siendo $k \in \mathbb{R}$.

Ejemplo. Calculamos la integral indefinida $\int \ln(x)/x dx$. Tomemos $u(x) = \ln(x)$ y $v'(x) = 1/x$; por tanto $u'(x) = 1/x$ y $v(x) = \ln(x)$. Llamemos $I(x)$ a la integral que queremos calcular. Aplicando integración por partes se tiene que

$$I(x) = \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \ln^2(x) - \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \ln^2(x) - I(x).$$

Como vemos, al aplicar la técnica, vuelve a aparecer la integral inicial (cuando esto se produce, decimos que la integración por partes es *cíclica*). Resolvemos finalmente sin más que despejar el valor de $I(x)$, esto es

$$I(x) = \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2(x) + k,$$

siendo $k \in \mathbb{R}$.

7.3.2. Integración de funciones racionales

Queremos calcular

$$(7.3) \quad \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios tal que el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. Las funciones que son cocientes de polinomios se llaman *racionales*. Vamos a aprender a integrar la mayor parte de ellas, atendiendo a las siguientes consideraciones.

- Supongamos que la integral racional es del tipo

$$\int \frac{D(x)}{d(x)} dx,$$

siendo el grado del numerador $D(x)$ mayor o igual que el grado del denominador $d(x)$. En este caso, procedemos haciendo la división de los dos polinomios, de forma que aplicando el teorema de la división se tiene que

$$\frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{r(x)}{d(x)} \implies \int \frac{D(x)}{d(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{r(x)}{d(x)} dx,$$

donde $C(x)$ es el polinomio cociente de la división y $r(x)$ es el resto. La integral $\int C(x) dx$ es inmediata por ser la integral de una función polinómica y la integral $\int r(x)/d(x) dx$ es del tipo que queremos aprender a calcular, ya que el resto $r(x)$ de la división tiene grado menor que el grado del divisor $d(x)$. Para ello hay que seguir el siguiente apartado.

- Supongamos que la integral racional a calcular es (7.3). Integrales de este tipo se pueden resolver descomponiendo el integrando $P(x)/Q(x)$ en ‘fracciones simples’ cuya integral sea abordable. Para ello basta con hallar las raíces del polinomio $Q(x)$ y seguir el *método de descomposición en fracciones simples* que se ilustra a continuación. Hay cuatro posibilidades básicas, esto es, que las raíces de $Q(x)$ sean:

- (a) reales y distintas;
- (b) reales que se repiten (múltiples);
- (c) complejas y distintas;
- (d) complejas que se repiten (múltiples).

En lo que sigue, solamente nos centraremos en los casos (a), (b) y (c), explicando el método de descomposición en fracciones simples a través de ejemplos.

Ejemplo del caso (a). Calculamos $\int \frac{x+2}{x^3-3x^2+2x} dx$.

El grado del numerador es igual a uno y el grado del denominador es igual a tres. Las raíces del denominador $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ se obtienen resolviendo la ecuación $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ y son $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ (reales y distintas). Por tanto $Q(x) = x(x-1)(x-2)$. Descomponemos el integrando de la siguiente forma, donde $A, B, C \in \mathbb{R}$ son coeficientes indeterminados, uno por cada raíz de $Q(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{Q(x)} &= \frac{x+2}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \\ &= \frac{A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)}. \end{aligned}$$

Los denominadores de la segunda y la última fracción de la expresión anterior son iguales; por tanto identificamos los numeradores para todo $x \in \mathbb{R}$, esto es

$$x+2 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1).$$

Asignando a x unos valores arbitrarios, por ejemplo los valores de las raíces de $Q(x)$, se obtienen los coeficientes buscados

$$\begin{aligned} x=0 &\implies 2=2A \implies A=1, \\ x=1 &\implies 3=-B \implies B=-3, \\ x=2 &\implies 4=2C \implies C=2. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^3-3x^2+2x} dx &= \int \frac{dx}{x} - 3 \int \frac{dx}{x-1} + 2 \int \frac{dx}{x-2} \\ &= \ln|x| - 3\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + k, \end{aligned}$$

donde $k \in \mathbb{R}$.

Ejemplo del caso (b). Calculamos $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} dx$.

El grado del numerador es igual a dos y el grado del denominador es igual a tres. En este caso, el denominador $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$ tiene una raíz real triple, $x_1 = 1$. La descomposición en fracciones simples se hace tal como sigue (siendo la raíz triple, se necesitan tres coeficientes indeterminados $A, B, C \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 1}{Q(x)} &= \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3} = \frac{A}{(x - 1)^3} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x - 1} \\ &= \frac{A + B(x - 1) + C(x - 1)^2}{(x - 1)^3}. \end{aligned}$$

Los denominadores de la segunda y la última fracción de la expresión anterior son iguales; por tanto identificamos los numeradores para todo $x \in \mathbb{R}$, esto es $x^2 + 1 = A + B(x - 1) + C(x - 1)^2$. Por tanto, asignando a x unos valores arbitrarios, tenemos que

$$x = 1 \implies 2 = A,$$

$$x = -1 \implies 2 = 2 - 2B + 4C,$$

$$x = 2 \implies 5 = 2 + B + C,$$

esto es $A = 2$, $B = 2$ y $C = 1$. Finalmente

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} dx &= 2 \int \frac{dx}{(x - 1)^3} + 2 \int \frac{dx}{(x - 1)^2} + \int \frac{dx}{x - 1} \\ &= -\frac{1}{(x - 1)^2} - \frac{2}{x - 1} + \ln |x - 1| + k, \end{aligned}$$

donde $k \in \mathbb{R}$.

Ejemplo del caso (c). Calculamos $\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} dx$.

El grado del numerador es igual a cero y el grado del denominador es igual a dos. En este caso, el denominador $Q(x) = x^2 + x + 1$ tiene dos raíces complejas conjugadas, pero no es necesario obtenerlas para poder calcular la integral. De hecho, $Q(x)$ puede escribirse ‘completando cuadrados’ como $Q(x) = (x + 1/2)^2 + 3/4$. Así pues, teniendo en cuenta que

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + k,$$

si $a > 0$, con $k \in \mathbb{R}$, se obtiene que

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{2\sqrt{3}(x + 1/2)}{3} \right) + k.$$

NOTA. La integral que acabamos de resolver es una integral ‘modelo’ elemental del caso (c), pero en la práctica podemos encontrarnos con casos más complicados. Cuando esto pase, seguiremos el procedimiento del siguiente ejemplo.

Ejemplo mixto. Calculamos $\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x} dx$.

El grado del numerador es igual a dos y el grado del denominador es igual a tres. El denominador $Q(x) = x^3 + x = x(x^2 + 1)$ tiene una raíz real ($x_1 = 0$) y dos raíces complejas conjugadas. Estamos por tanto en un caso mixto que combina (a) y (c). Descomponemos en fracciones simples tal como sigue (puede observarse que para el polinomio $x^2 + 1$ se debe considerar en el numerador un polinomio genérico de grado inferior, esto es de grado uno, con coeficientes indeterminados $M, N \in \mathbb{R}$):

$$\frac{x^2 - x + 1}{Q(x)} = \frac{x^2 - x + 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2 + 1) + Mx^2 + Nx}{x(x^2 + 1)}.$$

Los denominadores de la segunda y la última fracción de la expresión anterior son iguales; por tanto identificamos los numeradores para todo $x \in \mathbb{R}$, esto es $x^2 - x + 1 = A(x^2 + 1) + Mx^2 + Nx$. Podemos hallar los coeficientes incógnitos asignando a x unos valores arbitrarios. Así pues

$$x = 0 \implies 1 = A,$$

$$x = 1 \implies 1 = 2 + M + N,$$

$$x = -1 \implies 3 = 2 + M - N,$$

y despejando se calcula $A = 1$, $M = 0$ y $N = -1$. Finalmente

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x} dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \ln|x| - \arctan(x) + k,$$

donde $k \in \mathbb{R}$.

Ejemplo con grado del numerador mayor que el grado del denominador.

Calculamos $\int \frac{6x^4 + 4x^2 + x - 5}{2x^2 - 1} dx$.

El grado del numerador es igual a cuatro y el grado del denominador es igual a dos. En este caso, antes de todo, debemos efectuar la división entre polinomios

$$\frac{6x^4 + 4x^2 + x - 5}{2x^2 - 1} = 3x^2 + 7/2 + \frac{x - 3/2}{2x^2 - 1},$$

donde el cociente es $C(x) = 3x^2 + 7/2$ y el resto es $r(x) = x - 3/2$. Por tanto

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^4 + 4x^2 + x - 5}{2x^2 - 1} dx &= \int (3x^2 + 7/2) dx + \int \frac{x - 3/2}{2x^2 - 1} dx \\ &= x^3 + \frac{7}{2}x + \left(\frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{4} \right) \ln \left| x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right| + \left(\frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{8} \right) \ln \left| x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| + k, \end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{R}$, donde la última integral se ha resuelto siguiendo los pasos del caso (a).

NOTA. Se recuerde que, en el método de descomposición en fracciones simples, el número de coeficientes por determinar es igual al grado del denominador $Q(x)$.

7.3.3. Integración por cambio de variable

Supongamos que queremos calcular la integral

$$\int f(g(x)) g'(x) dx,$$

donde f es una función continua y g es una función derivable. Si F es una primitiva de f , esto es $F'(x) = f(x)$, por la regla de la cadena tenemos que

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) g'(x) = f(g(x)) g'(x).$$

Por tanto, la función $(F \circ g)$ es una primitiva de la función $(f \circ g) g'$ y tenemos que

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = (F \circ g)(x) + k,$$

con $k \in \mathbb{R}$.

En la práctica esta fórmula se usa del modo siguiente. Llamemos $u = g(x)$ (esto es un *cambio de variable*; de aquí viene el nombre del método de integración). Por tanto u es una función de la variable x y podemos calcular su derivada $du/dx = g'(x)$. Así pues, formalmente tenemos que $du = g'(x) dx$ y podemos escribir

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + k,$$

siendo $k \in \mathbb{R}$. Después del cambio de variable, esperamos que determinar F sea más sencillo que calcular la integral de partida.

NOTA. Si la integral a calcular por cambio de variable es definida, aplicamos

$$\int_{x=a}^{x=b} f(g(x)) g'(x) dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du = \left[F(u) \right]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo. En algunos casos, $g'(x)$ aparece explícitamente en la integral dada y el cambio de variable apropiado es evidente. Por ejemplo, sea $\int \sin^4(3x) \cos(3x) dx$. Tomemos $u = \sin(3x)$, por tanto $du = 3 \cos(3x) dx$ y se tiene que

$$\begin{aligned} \int \sin^4(3x) \cos(3x) dx &= \frac{1}{3} \int \sin^4(3x) 3 \cos(3x) dx \\ &= \frac{1}{3} \int u^4 du = \frac{1}{15} u^5 + k = \frac{1}{15} \sin^5(3x) + k, \end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{R}$.

Ejemplo. Calculamos $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln(x)}$.

Sea $u = \ln(x)$, por tanto $du = dx/x$. Por otro lado, si $x = e$ entonces $u = \ln(e) = 1$ y si $x = e^2$ entonces $u = \ln(e^2) = 2$. Así pues

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln(x)} = \int_1^2 \frac{du}{u} = \left[\ln |u| \right]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$$

También podemos calcular la integral indefinida $\int dx/[x \ln(x)] = \ln |\ln(x)| + k$, con $k \in \mathbb{R}$, y sustituir aquí los límites de integración.

Ejemplo. Calculamos $\int e^{2x} \sqrt{1 + e^{2x}} dx$.

Tomemos $u = e^{2x}$, por tanto $du = 2e^{2x} dx$ y se tiene que

$$\int e^{2x} \sqrt{1 + e^{2x}} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{1 + u} du = \frac{1}{3} (1 + u)^{3/2} + k = \frac{1}{3} (1 + e^{2x})^{3/2} + k,$$

con $k \in \mathbb{R}$.

NOTA. A veces, el cambio de variable más apropiado no es tan evidente; pero en general la forma del integrando sugiere cómo proceder. En estos casos, puede ser conveniente determinar x en función de u y luego calcular dx antes de sustituir en la integral. Como ejemplo, se deja el ejercicio de calcular $\int \sqrt{e^x - 1} dx$.

Si el integrando está compuesto por funciones trigonométricas o irracionales, en muchos casos existen cambios de variable típicos que llevan a integrales de funciones racionales, tal y cómo se ilustra en las siguientes dos secciones.

7.3.4. Integración de funciones trigonométricas

Integrales de la forma

$$\int \sin^m(x) \cos^n(x) dx,$$

con $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se pueden resolver teniendo en cuenta lo siguiente.

- Sean m y/o n impares. Se efectúa el cambio de variable $u = \cos(x)$ y se escribe $\sin^{2k+1}(x) = \sin(x)[1 - \cos^2(x)]^k$ (si $m = 2k + 1$, para algún $k = 0, 1, \dots$), o bien se efectúa el cambio de variable $u = \sin(x)$ y se escribe $\cos^{2k+1}(x) = \cos(x)[1 - \sin^2(x)]^k$ (si $n = 2k + 1$, para algún $k = 0, 1, \dots$).

Ejemplo. Calculamos $\int \sin^2(x) \cos^3(x) dx$.

$$\begin{aligned} \int \sin^2(x) \cos^3(x) dx &= \int \sin^2(x) [1 - \sin^2(x)] \cos(x) dx \\ &= \int u^2 (1 - u^2) du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + c = \frac{1}{3} \sin^3(x) - \frac{1}{5} \sin^5(x) + c, \end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$, donde se ha aplicado el cambio de variable $u = \sin(x)$.

- Sean m y n pares. Se aplican las identidades $\sin^2(x) = [1 - \cos(2x)]/2$ y $\cos^2(x) = [1 + \cos(2x)]/2$.

Ejemplo. Calculamos $\int \cos^4(x) dx$.

$$\begin{aligned} \int \cos^4(x) dx &= \frac{1}{4} \int [1 + \cos(2x)]^2 dx = \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx \\ &+ \frac{1}{8} \int [1 + \cos(4x)] dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{32} \sin(4x) + c, \end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Para integrar

$$\int R(\sin(x), \cos(x)) dx,$$

donde R es una función racional en seno y coseno, existe un cambio de variable universal, $u = \tan(x/2)$, que convierte la integral dada en la integral de una función racional. En este caso, se tiene que

$$\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2}{1+u^2} du.$$

Dicho cambio de variable (también llamado ‘heróico’) suele dar lugar a una integral que es costosa de calcular. Por tanto, se aconseja usar otros cambios de variable, que hacen más llevaderos los cálculos, cuando nos encontremos las siguientes situaciones.

- (1) Sea R impar en $\sin(x)$, esto es $R(-\sin(x), \cos(x)) = -R(\sin(x), \cos(x))$. Se hace el cambio de variable $u = \cos(x)$.
- (2) Sea R impar en $\cos(x)$, esto es $R(\sin(x), -\cos(x)) = -R(\sin(x), \cos(x))$. Se hace el cambio de variable $u = \sin(x)$.
- (3) Sea R par en $\sin(x)$ y $\cos(x)$, esto es $R(-\sin(x), -\cos(x)) = R(\sin(x), \cos(x))$. Se hace el cambio de variable $u = \tan(x)$ y se tiene en cuenta que

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1+u^2}, \quad dx = \frac{1}{1+u^2} du.$$

Cuando realizamos los cambios de variable anteriores, la integral trigonométrica siempre se convierte en la integral de una función racional en la nueva variable de integración u .

Ejemplo. Calculamos $\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 - \cos^2(x)} dx$.

Vemos que $R(\operatorname{sen}(x), \cos(x)) = \operatorname{sen}(x)/[1 - \cos^2(x)]$ es impar en $\operatorname{sen}(x)$ ya que

$$R(-\operatorname{sen}(x), \cos(x)) = -\frac{\operatorname{sen}(x)}{1 - \cos^2(x)} = -R(\operatorname{sen}(x), \cos(x)).$$

Por tanto, siguiendo el caso (1), hacemos el cambio de variable $u = \cos(x)$. Sustituyendo en la integral y teniendo en cuenta que $du = -\operatorname{sen}(x) dx$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 - \cos^2(x)} dx &= \int \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u - 1} du - \frac{1}{2} \int \frac{1}{u + 1} du \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u - 1}{u + 1} \right| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos(x) - 1}{\cos(x) + 1} \right| + c, \end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Ejemplo. Calculamos $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x) \cos^3(x)}$.

Vemos que $R(\operatorname{sen}(x), \cos(x)) = 1/[\operatorname{sen}(x) \cos^3(x)]$ es par en $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ ya que

$$R(-\operatorname{sen}(x), -\cos(x)) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x) \cos^3(x)} = R(\operatorname{sen}(x), \cos(x)).$$

Por tanto, siguiendo el caso (3), hacemos el cambio de variable $u = \tan(x)$. Sustituyendo en la integral tenemos que

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x) \cos^3(x)} &= \int \frac{(1 + u^2)^2}{u(1 + u^2)} du \\ &= \int \frac{du}{u} + \int u du = \ln |\tan(x)| + \frac{1}{2} \tan^2(x) + c, \end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$, donde hemos usado que $\operatorname{sen}(x) \cos^3(x) = \tan(x) \cos^4(x)$.

7.3.5. Integración de funciones irracionales

La integración de funciones irracionales suele ser complicada y solamente en casos muy determinados se conocen cambios de variable que resuelven las integrales transformándolas en otros tipos conocidos (por ejemplo racionales o trigonométricas). Veamos a continuación tres tipos de integrales de funciones irracionales.

- $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx$, donde R es una función racional en la variable x y en la raíz indicada ($n \geq 2$ es un entero, a y b son constantes reales). Este tipo de integrales se transforman en integrales de funciones racionales mediante el cambio de variable $u = \sqrt[n]{ax+b}$.

Ejemplo. Calculamos $\int x \sqrt[3]{1+x} dx$.

Hacemos el cambio de variable $u = \sqrt[3]{1+x}$. Por tanto, tenemos que $x = u^3 - 1$ y $dx = 3u^2 du$. Así pues

$$\int x \sqrt[3]{1+x} dx = 3 \int (u^6 - u^3) du = \frac{3}{7}u^7 - \frac{3}{4}u^4 + c = \frac{3}{7}(1+x)^{7/3} - \frac{3}{4}(1+x)^{4/3} + c,$$

con $c \in \mathbb{R}$.

- $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, donde R es una función racional en la variable x y en la raíz indicada (a es una constante real positiva). Este tipo de integrales se transforman en integrales de funciones trigonométricas mediante el cambio de variable $x = a \sin(u)$.

Ejemplo. Calculamos $\int \sqrt{9 - x^2} dx$.

Hacemos el cambio de variable $x = 3 \sin(u)$. Por tanto $dx = 3 \cos(u) du$ y tenemos que

$$\int \sqrt{9 - x^2} dx = 9 \int \cos^2(u) du = \frac{9}{2} \int [1 + \cos(2u)] du = \frac{9}{2}u + \frac{9}{4} \sin(2u) + c,$$

con $c \in \mathbb{R}$, donde hemos usado que $\cos^2(u) = [1 + \cos(2u)]/2$. Deshaciendo el cambio de variable, $u = \arcsin(x/3)$, se obtiene finalmente que

$$\int \sqrt{9 - x^2} dx = \frac{9}{2} \arcsin(x/3) + \frac{x}{2} \sqrt{9 - x^2} + c,$$

donde hemos aplicado que $\sin(2u) = 2 \sin(u) \cos(u) = 2 \sin(u) \sqrt{1 - \sin^2(u)}$.

- $\int R(x, \sqrt{x^2 + a}) dx$, donde R es una función racional en la variable x y en la raíz indicada (a es una constante real positiva). Este tipo de integrales se pueden resolver también por cambio trigonométrico o bien se puede hacer el cambio de variable $u = x + \sqrt{x^2 + a}$, que las transforman en integrales de funciones racionales, dado que $(u - x)^2 = u^2 - 2ux + x^2 = x^2 + a$ implica que

$$x = (u - a/u)/2 \text{ y } dx = (1 + a/u^2)/2 du.$$

Ejemplo. Calculamos $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Hacemos el cambio de variable $u = x + \sqrt{1+x^2}$. Por tanto

$$x = \frac{u^2 - 1}{2u}, \quad dx = \frac{u^2 + 1}{2u^2} du.$$

Así pues

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = 2 \int \frac{du}{u^2 - 1} = \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + c = \ln \left| \frac{x + \sqrt{1+x^2} - 1}{x + \sqrt{1+x^2} + 1} \right| + c,$$

con $c \in \mathbb{R}$.

