uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

CÁLCULO

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Índice general

Capítulo 8

Integrales impropias

En el Capítulo 7 hemos introducido el concepto de integral definida de una función real f acotada en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, siendo a, $b \in \mathbb{R}$. En este capítulo, vamos a extender dicho concepto en una triple vertiente.

(1) La función f está acotada, pero el intervalo de integración no está acotado. Existen las siguientes tres posibilidades:

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt\,; \qquad \int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt\,; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt\,.$$

Este tipo de integrales se denominan *integrales impropias de primera especie.*

(2) La función f no está acotada en un punto $x_0 \in [a, b]$. Existen las siguientes tres posibilidades:

$$\int_{x_0}^{b} f(t)\,dt\,, \quad \text{si} \quad x_0 = a\,; \qquad \int_a^{x_0} f(t)\,dt\,, \quad \text{si} \quad x_0 = b\,;$$

$$\int_a^{b} f(t)\,dt \;=\; \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{b} f(t)\,dt\,, \quad \text{si} \quad x_0 \in (a, b)\,.$$

Este tipo de integrales se denominan *integrales impropias de segunda especie.*

(3) El caso 'mixto' engloba los casos (1) y (2) anteriores: la función f y el intervalo de integración no están acotados. Este tipo de integrales se denominan *integrales impropias de tercera especie.*

8.1. Integrales impropias de primera especie

Comenzamos definiendo las integrales impropias de primera especie, correspondientes al caso (1).

Definición 46 *Supongamos que f es acotada en el intervalo $[a, +\infty)$, que existe la integral $\int_a^A f(t)\,dt$, para todo $A \geq a$, y que existe $\lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(t)\,dt$. Entonces, se define*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(t)\,dt\,.$$

Si el límite anterior es $L \in \mathbb{R}$, se dice que la integral impropia es convergente y su valor es L. En caso contrario, se dice que la integral impropia es divergente.

Analogamente se define la integral impropia cuando el intervalo no está acotado inferiormente.

Definición 47 *Supongamos que f es acotada en el intervalo $(-\infty, b]$, que existe la integral $\int_B^b f(t)\,dt$, para todo $B \leq b$, y que existe $\lim_{B\to-\infty} \int_B^b f(t)\,dt$. Entonces, se define*

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt = \lim_{B\to-\infty} \int_B^b f(t)\,dt\,.$$

Si el límite anterior es $L \in \mathbb{R}$, se dice que la integral impropia es convergente y su valor es L. En caso contrario, se dice que la integral impropia es divergente.

Finalmente, podemos dar un significado a la integral impropia sobre todo $\mathbb{R}$.

Definición 48 *Supongamos que f es acotada en $\mathbb{R}$. Entonces, se define*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{+\infty} f(t)\,dt\,,$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es arbitrario. Se dice que la integral impropia es convergente si ambas integrales impropias del lado derecho convergen independientemente del valor de c considerado.

NOTA. Observése que, en la Definición 46, para cada $A \geq a$ tenemos una integral definida 'estándar', $\int_a^A f(t)\,dt$, cuyo valor dependerá de A (será una función de A). Por tanto, tiene sentido calcular su límite cuando $A \to +\infty$. Un razonamiento similar se aplica a la Definición 47.

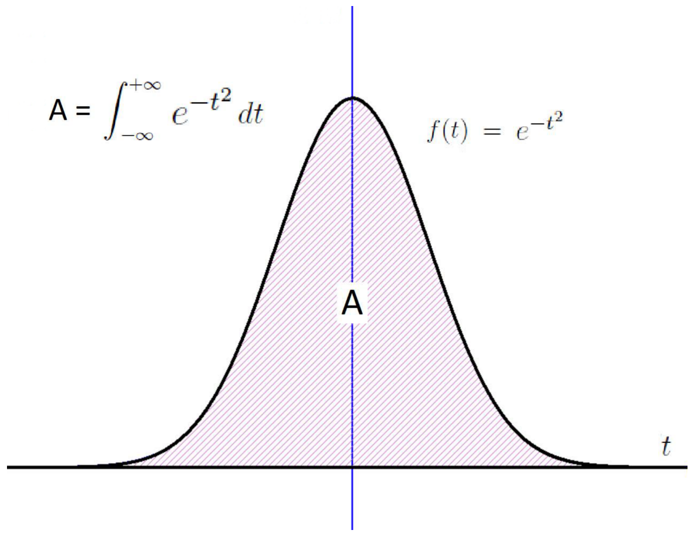

Figura 8.1: Ejemplo de integral impropia de primera especie.

Veamos ahora algunos ejemplos que sirven de base para el estudio de las integrales impropias de primera especie.

Ejemplo 1. Estudiamos la convergencia de la familia de integrales impropias

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s}\,dt\,,$$

donde $s \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

Si $s \neq 1$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s}\,dt &= \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} \frac{1}{t^s}\,dt = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{1-s}\left[\,t^{1-s}\,\right]_{t=1}^{t=A} \\ &= \frac{1}{1-s} \lim_{A\to+\infty} \left[\,A^{1-s}-1\,\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{s-1} & \text{si } \ s>1 \quad \text{(convergente)}\,, \\ +\infty & \text{si } \ s<1 \quad \text{(divergente)}\,. \end{cases}\end{aligned}$$

Por otro lado, si $s = 1$, la integral impropia es divergente pues

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} \frac{1}{t}\,dt = \lim_{A\to+\infty} \left[\,\ln(t)\,\right]_{t=1}^{t=A} = \lim_{A\to+\infty} \ln(A) = +\infty\,.$$

NOTA. La integral impropia $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^s}\, dt$ también converge si $s > 1$, para todo $a > 0$.

Ejemplo 2. Estudiamos la convergencia de la familia de integrales impropias

$$\int_0^{+\infty} e^{at}\, dt\,,$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

Si $a \neq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{at}\, dt &= \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{at}\, dt = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{a}\left[\, e^{at}\,\right]_{t=0}^{t=A} \\ &= \frac{1}{a} \lim_{A\to+\infty} \left[\, e^{aA} - 1\,\right] = \begin{cases} -\dfrac{1}{a} & \text{si } \ a < 0 \quad \text{(convergente)}\,, \\ +\infty & \text{si } \ a > 0 \quad \text{(divergente)}\,. \end{cases}\end{aligned}$$

Si $a = 0$, la integral impropia es divergente pues

$$\int_0^{+\infty} e^{at}\, dt = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A dt = \lim_{A\to+\infty} [\, t\,]_{t=0}^{t=A} = \lim_{A\to+\infty} A = +\infty\,.$$

8.1.1. Criterios de convergencia

En general, no siempre será posible calcular el valor de una integral impropia aplicando las definiciones anteriores. Pero podemos conocer información sobre su convergencia si comparamos la integral impropia dada con otras integrales impropias ya conocidas (por ejemplo, las introducidas previamente). Concretemos este resultado en los siguientes teoremas.

Teorema 49 ***(criterio de comparación)*** *Si* $0 \leq f(t) \leq g(t)$ *para todo* $t \geq a$, *entonces*

$$0 \leq \int_a^{+\infty} f(t)\, dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)\, dt$$

y además se tiene que

$$\int_a^{+\infty} g(t)\, dt \ \textit{converge} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(t)\, dt \ \textit{converge}\,.$$

NOTAS.

- El Teorema 49 solamente se aplica a integrales con integrando positivo. Además, se supone que las dos funciones involucradas son integrables para todo $A \geq a$.
- Otra consecuencia del Teorema 49 es que si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ es divergente, entonces $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ es divergente también.
- Un resultado similar vale para integrales del tipo $\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt$, si las hipótesis se cumplen para todo $t \leq b$.

Ejemplo. Estudiamos la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\,dt\,.$

Tomemos $f(t) = (1-e^{-t^2})/t^2$. Sabemos que $e^{-t^2} < 1$ para todo $t \geq 1$, por tanto $0 \leq f(t) = (1-e^{-t^2})/t^2 \leq 1/t^2 = g(t)$. Aplicando el criterio de comparación se concluye que la integral propuesta es convergente, ya que $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt = \int_1^{+\infty} dt/t^2$ converge pues es un caso particular de las integrales del ejemplo 1 anterior (con $s = 2 > 1$).

Veamos ahora otro criterio más fácil de aplicar en la práctica.

Teorema 50 ***(criterio de comparación por paso al límite)*** *Supongamos que $f(t),\, g(t) \geq 0$ para todo $t \geq a$ y que existe el límite*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\,.$$

Entonces

- $c \neq 0$ *:* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *converge* $\iff$ $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ *converge ;*
- $c = 0$ *:* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ *converge* $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *converge ;*
- $c = +\infty$ *:* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ *diverge* $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *diverge .*

NOTAS.

- El Teorema 50 solamente se aplica a integrales con integrando positivo. Además, se supone que las dos funciones involucradas son integrables para todo $A \geq a$.

- Si $c = 0$, otra consecuencia del Teorema 50 es que si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ es divergente, entonces $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ es divergente también. Además, si $c = +\infty$, la convergencia de $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ implica la convergencia de $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$.

- Un resultado similar vale para integrales del tipo $\int_{-\infty}^b f(t)\,dt$, si las hipótesis se cumplen para todo $t \le b$ y consideramos $\lim_{t\to-\infty} f(t)/g(t)$.

Ejemplo. Estudiamos la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{t^5 - t + 1}}\,dt$.

Tenemos que

$$\frac{t}{\sqrt{t^5 - t + 1}} = \frac{t}{\sqrt{t^5(1 - \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^5})}} = \frac{1}{t^{3/2}\sqrt{1 - \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^5}}}$$

y por tanto

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t\,/\,\sqrt{t^5 - t + 1}}{1\,/\,t^{3/2}} = 1 \ne 0\,.$$

Así pues, dado que la integral impropia $\int_1^{+\infty} dt/t^{3/2}$ converge (veáse el ejemplo 1 anterior), aplicando el criterio de comparación por paso al límite concluimos que la integral dada es convergente.

Teorema 51 ***(convergencia absoluta)*** *Se cumple que*

$$\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt \;\; \textit{converge} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(t)\,dt \;\; \textit{converge}\,.$$

Cuando $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ *converge, se dice que la integral* $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *es absolutamente convergente.*

Nota. Un resultado similar vale para integrales del tipo $\int_{-\infty}^b f(t)\,dt$.

8.2. Integrales impropias de segunda especie

Definamos ahora las integrales impropias de segunda especie, correspondientes al caso (2) descrito al principio de este capítulo.

Definición 49 *Supongamos que la función f no está acotada en el punto a y existe $\int_B^b f(t)\,dt$ para todo $B \in (a,b]$. Entonces se define*

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; \lim_{B\to a^+} \int_B^b f(t)\,dt\,.$$

Si este límite existe y es $L \in \mathbb{R}$, se dice que la integral impropia es convergente y su valor es L. En cualquier otro caso se dice que la integral impropia es divergente.

Definición 50 *Supongamos que la función f no está acotada en el punto b y existe $\int_a^A f(t)\,dt$ para todo $A \in [a,b)$. Entonces se define*

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; \lim_{A\to b^-} \int_a^A f(t)\,dt\,.$$

Si este límite existe y es $L \in \mathbb{R}$, se dice que la integral impropia es convergente y su valor es L. En cualquier otro caso se dice que la integral impropia es divergente.

Definición 51 *Supongamos que la función f no está acotada en el punto $x_0 \in (a,b)$ y existen $\int_a^A f(t)\,dt$ para todo $A \in [a,x_0)$ y $\int_B^b f(t)\,dt$ para todo $B \in (x_0,b]$. Entonces se define*

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; \int_a^{x_0} f(t)\,dt \;+\; \int_{x_0}^b f(t)\,dt\,.$$

La integral impropia es convergente si ambas integrales impropias del lado derecho convergen.

Ejemplo. Dos familias de integrales impropias de segunda especie, que son muy útiles para resolver determinados problemas, son

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^s}\,, \qquad \int_a^b \frac{dt}{(t-b)^s}\,,$$

siendo $a < b$ números reales cualesquiera. Se puede comprobar fácilmente que ambas integrales convergen si $s < 1$ y divergen si $s \geq 1$.

Las integrales impropias de segunda especie cuentan también con sus criterios de convergencia, que son equivalentes a los que hemos visto para las integrales impropias de primera especie. Los enunciamos suponiendo que la función f no está acotada en el punto a (con las hipótesis que ésto conlleva), pero se tenga en cuenta que resultados similares valen también para integrales en las que la función f no está acotada en el punto b.

- Supongamos que $0 \leq f(t) \leq g(t)$ para todo $t \in (a, b]$. Entonces

$$\int_a^b g(t)\, dt \ \text{converge} \implies \int_a^b f(t)\, dt \ \text{converge}\,.$$

- Supongamos que $f(t)$, $g(t) \geq 0$ para todo $t \in (a, b]$ y que existe el límite

$$\lim_{t \to a^+} \frac{f(t)}{g(t)} = c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\,.$$

  Entonces

  ✓ $c \neq 0$: $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ converge $\iff$ $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ converge;

  ✓ $c = 0$: $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ converge $\implies$ $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ converge;

  ✓ $c = +\infty$: $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ diverge $\implies$ $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ diverge.

- Se tiene que $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\, dt$ converge $\implies$ $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ converge.

Nota. Comentarios similares a los que hemos visto sobre las integrales impropias de primera especie valen para los criterios de convergencia correspondientes.

Ejemplo. Estudiamos la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t + t^2}\, dt\,.$

Podemos ver que la función $f(t) = 1/(t + t^2)$ no está acotada en $x_0 = 0$ ya que $\lim_{t \to 0^+} f(t) = +\infty$. Dado que el intervalo de integración está acotado, se trata de una integral impropia de segunda especie. Por otro lado, considerando $g(t) = 1/t$, tenemos que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{g(t)} = 1 \neq 0\,.$$

Así pues, siendo $\int_0^1 g(t)\, dt = \int_0^1 dt/(t - 0)^1$ divergente, podemos decir que la integral dada es divergente también (por el criterio de comparación al límite). Nótese que si comparásemos directamente, esto es $0 \leq f(t) = 1/(t + t^2) \leq g(t) = 1/t$ para todo $t \in (0, 1]$, no podríamos concluir nada sobre $\int_0^1 f(t)\, dt$ ya que la integral $\int_0^1 g(t)\, dt$ es divergente.

En el caso de una integral impropia de tercera especie (correspondiente al caso (3) del comienzo de este capítulo), debemos escribir la integral dada como suma de integrales impropias de primera o segunda especie y analizar cada una de ellas como hemos visto en las Secciones 8.1 y 8.2. Por ejemplo, tendríamos que

$$\int_1^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{t^4-1}}\,dt \;=\; \int_1^{2} \frac{t}{\sqrt{t^4-1}}\,dt \;+\; \int_2^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{t^4-1}}\,dt\,,$$

donde la primera integral del lado derecho es impropia de segunda especie y la segunda es impropia de primera especie. Finalmente, la integral impropia de partida será convergente si convergen todas las integrales impropias en las que se descompone.