uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

CC BY NC SA

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

POLINOMIO DE TAYLOR

Problema 5.1.

- Se obtiene $\operatorname{sen}(1) \approx 0.8415$ usando el polinomio de Maclaurin de grado 7 para la función $\operatorname{sen}(x)$ evaluado en $x = 1$.
- Se obtiene $\sqrt[5]{\frac{3}{2}} \approx 1.08$ usando el polinomio de Maclaurin de grado 2 para la función $(1+x)^{1/5}$ evaluado en $x = 1/2$.

Problema 5.2.

a) $P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$.

b) $P_n(x) = 3x^2 - \frac{9}{2}x^6 + \frac{81}{40}x^{10} + \ldots + (-1)^k \frac{3^{2k+1}}{(2k+1)!}\, x^{4k+2}, \quad n = 2k+1$.

c) $P_5(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$.

d) $P_3(x) = 1 - \frac{3}{2}x^2$ (el coeficiente de x^3 es igual a cero).

e) $P_n(x) = 4 + 4x + 3x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \ldots + \frac{2^n+2}{n!}\, x^n$.

Problema 5.3. El polinomio puede escribirse (de forma exacta) como su polinomio de Taylor de grado 4 centrado en $a = 4$, esto es

$$x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4 \;=\; -56 + 21(x-4) + 37(x-4)^2 + 11(x-4)^3 + (x-4)^4 \,.$$

Problema 5.4. Usando el principio de inducción, se demuestra que

$$f(x) \;=\; -1 - (x+1) - (x+1)^2 - \ldots - (x+1)^n + \frac{1}{c}\left(-\frac{x+1}{c}\right)^{n+1},$$

donde el último término es el resto de Taylor y $c \in (-1, x)$ o $(x, -1)$.

Problema 5.5. $P_5(x) \;=\; x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 \,.$

Problema 5.6. El coeficiente deseado es $\dfrac{f^{(4)}(0)}{4!} \;=\; -\dfrac{1}{12}\,.$

Problema 5.7.

- $P_3(x) \;=\; 2x - \frac{4}{3}x^3 \,.$
- $P_3(x) \;=\; 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 \,.$
- $P_3(x) \;=\; x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 \,.$
- $P_3(x) \;=\; -x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 \,.$
- $P_3(x) \;=\; x^2$ (el coeficiente de x^3 es igual a cero).
- $P_3(x) \;=\; x - x^2 + \frac{11}{6}x^3 \,.$

Problema 5.8.

- $P_n(x) = 1 - \frac{a^2}{2!}x^2 + \frac{a^4}{4!}x^4 - \frac{a^6}{6!}x^6 + \ldots + (-1)^k \frac{a^{2k}}{(2k)!}x^{2k}, \;\; n = 2k.$
- $P_n(x) = ax + \frac{a^3}{3!}x^3 + \frac{a^5}{5!}x^5 + \ldots + \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1}, \;\; n = 2k+1.$
- $P_n(x) = 1 + ax^2 + \frac{a^2}{2!}x^4 + \frac{a^3}{3!}x^6 + \ldots + \frac{a^k}{k!}x^{2k}, \;\; n = 2k.$
- $P_n(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \ldots + 2x^n.$

Problema 5.9.

- La ecuación de la recta tangente es $y = 0$.
- El valor del límite es 2.
- $f^{(4)}(1) = -72$.

Problema 5.10. En cada igualdad, demuestra que el límite indicado de la función a la izquierda dividida por la potencia de x en $o(\cdot)$ es cero (usa polinomios de Taylor adecuados en los primeros tres casos y la regla de l'Hôpital en el último caso).

Problema 5.11. Un polinomio adecuado es $P(x) = 1 - \frac{1}{2}x^4$.

Problema 5.12. El polinomio buscado es $P_3(x) = 2 + x + x^3/6$. Además, el error de aproximación se puede acotar superiormente como

$$|R_3(x)| = \left|\frac{\cos(c) + e^c}{4!}x^4\right| \leq \frac{1 + e^{1/4}}{4!}\left(\frac{1}{4}\right)^4,$$

donde $c \in (-1/4, 1/4)$.

Problema 5.13. Debemos considerar un polinomio de Maclaurin por lo menos de grado $n = 7$.

Problema 5.14. Tenemos $1/\sqrt{1.1} \approx 0.9534375$ con el polinomio de Maclaurin de grado 3 para $f(x) = (1+x)^{-1/2}$ evaluado en $x = 0.1$. Una cota superior del error cometido es

$$\frac{35\,(0.1)^4}{2^7} \approx 0.000027\,.$$

Problema 5.15.

- Tenemos una aproximación de $\cos(1)$ mediante el polinomio de Maclaurin de grado $n \geq 6$ para $\cos(x)$ evaluado en $x = 1$.
- Tenemos una aproximación de e^{-2} con el polinomio de Maclaurin de grado $n \geq 9$ para e^x evaluado en $x = -2$.
- Tenemos una aproximación de $\ln(2)$ con el polinomio de Maclaurin de grado $n \geq 1000$ para $\ln(1+x)$ evaluado en $x = 1$.

Problema 5.16. Deben considerarse por lo menos todos los términos hasta $-x^{11}/11!$ incluido, con $x = 1/2$.

Problema 5.17. Los valores de los límites indicados son los siguientes.

a) $1/2\,.$

b) $1/120\,.$

c) $1/2\,.$

d) $1/2\,.$

e) $1/27\,.$

f) $1/6\,.$

g) 0.

h) $1/3$.

i) $-1/4$ (usa el cambio de variable $t = 1/x$).

j) $1/2$ (usa el cambio de variable $t = 1/x$).

Problema 5.18. Los valores de los límites indicados son los siguientes.

a) 0 (l'Hôpital).

b) $+\infty$ (l'Hôpital).

c) 1 (l'Hôpital).

d) 0 (l'Hôpital).

e) 0 (l'Hôpital).

f) 1 (l'Hôpital).

g) e (Taylor).