uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

SUCESIONES Y SERIES DE NÚMEROS REALES

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Problema 2.1. Estudia si las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dadas son acotadas, monótonas y convergentes.

a) $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

b) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

c) $a_n = \dfrac{n}{n+2}$.

d) $a_n = \dfrac{\lfloor n/2 \rfloor}{n}$.

e) $a_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$, $\quad x \in \mathbb{R}$.

f) $a_n = \dfrac{n + \operatorname{sen}(\pi n/2)}{2n+1}$.

g) $a_n = \sqrt[n]{\pi^n + (\sqrt{7})^n}$.

h) $a_n = \dfrac{1}{n^2+1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.

Problema 2.2. Calcula el límite, cuando $n \to \infty$, de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dadas.

a) $a_n = \dfrac{n^2}{(n-7)!}$ $\quad (n \geq 7)$.

b) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

c) $a_n = \sqrt{n^3 - 1} - n$.

d) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^3-1} - n}{5n^2 - 7\sqrt{n}}$.

e) $a_n = \dfrac{3^n + 2^{n+1}}{3^{n+1} + 2^n}$.

Problema 2.3. Demuestra que todas las siguientes sucesiones *recurrentes* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son acotadas y monótonas. Luego calcula $\lim_{n\to\infty} a_n$.

a) $a_1 = \sqrt{3},\ a_2 = \sqrt{3\sqrt{3}},\ a_3 = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}},\ \ldots$.

b) $a_n = 5 + \dfrac{a_{n-1}}{4}$ $\quad \forall n \geq 2, \quad a_1 = 0$.

c) $a_n = \dfrac{1 + 3a_{n-1}^2}{4}$ $\quad \forall n \geq 2, \quad 1/3 \leq a_1 < 1$.

d) $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ $\quad \forall n \geq 1, \quad a_1 = 1$.

Problema 2.4. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/(n-1)}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (7n^3-1)^{1/n}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2+1}{3n^2+2}\right)^{-n^2}$.

Problema 2.5. Estudia si las series de términos positivos dadas son convergentes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3+2\cos(k)}{k^2+k}$.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2}$.

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7\sqrt{k}+323}{k^2+\cos(k)}$.

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan(k)}{k^2+7}$.

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k+(-1)^k}$.

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^4}$.

h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k}$.

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^2}$.

j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}}$.

Problema 2.6. Estudia la convergencia de las siguientes series.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2+k}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k)}{5^k}$.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^k}{4+k!}$.

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\, 3^k\, 5^{-\sqrt{k}}$.

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(k))^k}$.

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$.

h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$.

Problema 2.7. Encuentra *todos* los valores de los parámetros $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales las series indicadas son convergentes.

$$\text{a)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^a}{b^k}, \quad a > 0, \; b \neq 0.$$

$$\text{b)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^k}{k!}.$$

$$\text{c)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2\alpha)^{3k}}{7^k \sqrt[3]{k^2 + k}}.$$