uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

FUNCIONES REALES: LÍMITES Y CONTINUIDAD

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Problema 3.1. Esboza la gráfica de las siguientes funciones.

$$
\begin{aligned}
1)\quad f(x) &= \sqrt{x-3}\,.\\
2)\quad f(x) &= x^2-4x+5\,.\\
3)\quad f(x) &= \left|\,(x-2)^3+1\,\right|\,.
\end{aligned}
$$

Problema 3.2. Calcula el dominio y la imágen de las siguientes funciones. Luego, para cada caso, estudia la continuidad de $f(x)$ y esboza su gráfica.

$$
\begin{aligned}
1)\quad f(x) &= \lfloor x \rfloor\,.\\
2)\quad f(x) &= x-\lfloor x \rfloor\,.\\
3)\quad f(x) &= \sqrt{x-\lfloor x \rfloor}\,.\\
4)\quad f(x) &= \lfloor x \rfloor+\sqrt{x-\lfloor x \rfloor}\,.\\
5)\quad f(x) &= \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor\,.
\end{aligned}
$$

Problema 3.3. Estudia la continuidad de las siguientes funciones.

$$
\begin{aligned}
1)\quad f(x) &= \frac{e^x+2\cos(x)-8x+5}{e^x+\operatorname{sen}^2(x)+5}\,.\\
2)\quad f(x) &= \sqrt{x^4+3}+e^{-x^2+\cos(x)}\operatorname{sen}(4x^5+3x^2+2x-5+\cos(x))+2\arctan(3^x-5)\,.\\
3)\quad f(x) &= e^{4/x}+x^4-7\,.\\
4)\quad f(x) &= \arccos^5(x)\,.\\
5)\quad f(x) &= (x-3)\ln(9x-4)\,.\\
6)\quad f(x) &= (4x^6+3x^3-2x+6)\ln(x)+\ln(9x-4)\arccos(x)\,.
\end{aligned}
$$

Problema 3.4. Analiza la continuidad de las siguientes funciones.

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{si } x \leq 0\,, \\ x^2 - x & \text{si } 0 < x < 1\,, \\ \cos\left(\pi|2 - x^2|\right) + 1 & \text{si } x \geq 1\,. \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^3 - x + 5 & \text{si } x < 0\,, \\ e^{x} + \operatorname{sen}(x) & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$$

Problema 3.5. Demuestra que la siguiente función está acotada.

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{si } -7 \leq x < 0\,, \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 5\,. \end{cases}$$

Problema 3.6. Demuestra que la ecuación $\cos(x) = x$ tiene *alguna* solución real.

Problema 3.7. Demuestra los siguientes teoremas.

1) Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua. Entonces, existe $x_0 \in (0, 1)$ tal que $f(x_0) = x_0$.

2) Sean f, $g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que $f(x_1) > g(x_1)$ y $f(x_2) < g(x_2)$. Entonces, existe $x_0 \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$.