uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

FUNCIONES REALES: DERIVABILIDAD

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Problema 4.1. Considera la función

$$f(x) \;=\; \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

- ¿Es $f(x)$ continua en $x = 0$?
- ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$?

Problema 4.2. Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función

$$f(x) = \sqrt{x+2}\, \arccos(x+2)\,.$$

Problema 4.3. Calcula la derivada primera de las siguientes funciones.

1) $f(x) \;=\; \sqrt{3x^2 - 7x - 2}\,.$
2) $f(x) \;=\; x^2 \operatorname{sen}(x) \tan(x)\,.$
3) $f(x) \;=\; \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}\,.$
4) $f(x) \;=\; \operatorname{sen}\left(\sqrt{1+\cos(x)}\right).$
5) $f(x) \;=\; \ln\left(\dfrac{x^2 \operatorname{sen}(x)}{\sqrt{1+x}}\right).$

Problema 4.4. Encuentra la ecuación de la *recta tangente* a la gráfica de la función

$$g(x) \;=\; \frac{x+1}{x-1}$$

en $x = 2$.

Problema 4.5. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones y calcula sus derivadas primeras (donde estén definidas).

- $f(x) = x^{1/3}$.
- $f(x) = \ln|x|$.

Problema 4.6. Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si} \quad x \leq 0\,, \\ 1 - x^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1\,, \\ \arctan(x) & \text{si} \quad x \geq 1\,. \end{cases}$$

y analiza si es derivable en $\mathbb{R}$. Además, calcula $f'(x)$ (donde esté definida).

Problema 4.7. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en $\mathbb{R}$. Calcula la expresión de la derivada primera de las siguientes funciones (donde esté definida).

1) $h(x) = f(g(x))\, e^{f(x)}$.

2) $h(x) = \dfrac{1}{\ln\left(f(x) + g^2(x)\right)}$.

3) $h(x) = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$.

4) $h(x) = \arctan\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$.

5) $h(x) = \ln\big(g(x)\, \cos(f(x))\big)$.

Problema 4.8. Sean c, c_1 y c_2 constantes reales. En cada caso, demuestra que la función $f(x)$ es solución de la ecuación *diferencial* correspondiente.

1)	$f(x) = c/x\,;$	$xf' + f = 0\,.$
2)	$f(x) = x\tan(x)\,;$	$xf' - f - f^2 = x^2\,.$
3)	$f(x) = c_1 \operatorname{sen}(3x) + c_2\cos(3x)\,;$	$f'' + 9f = 0\,.$
4)	$f(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}\,;$	$f'' - 9f = 0\,.$
5)	$f(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{5x}\,;$	$f'' - 7f' + 10f = 0\,.$
6)	$f(x) = \ln\left(c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}\right) + c_2\,;$	$f'' + (f')^2 = 1\,.$

Problema 4.9. Demuestra las siguientes igualdades.

$$
\begin{array}{lll}
1) \quad \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2} & & (\text{para } x > 0). \\
2) \quad \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - \arctan(x) = \dfrac{\pi}{4} & & (\text{para } x < 1). \\
3) \quad 2\arctan(x) + \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = \pi & & (\text{para } x > 1).
\end{array}
$$

CONSEJO: *calcula la derivada primera de la función de la izquierda en cada igualdad.*

Problema 4.10. Calcula el ángulo formado por las rectas tangentes por la derecha y por la izquierda, en $x = 0$, a la gráfica de la función

$$
f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}
$$

Problema 4.11. Dado $k \in \mathbb{R}$, se consideren las funciones

$$
f_1(x) = |x|^k\,, \quad f_2(x) = x\,|x|^{k-1}\,.
$$

- Para $x \neq 0$, calcula $f_1'(x)$ y $f_2'(x)$.
- Para $k > 1$, demuestra que ambas funciones son derivables en $x = 0$ y calcula $f_1'(0)\,,\ f_2'(0)$.
- Demuestra que si $f(x)$ es una función que satisface $|f(x)| \leq |x|^k$ con $k > 1$ y para todo x en un entorno de $x_0 = 0$, entonces $f(x)$ es derivable en $x_0 = 0$. Finalmente, calcula $f'(0)$.

Problema 4.12. Analiza la continuidad y la derivabilidad de la función

$$
f(x) = \begin{cases} (3-x^2)/2 & \text{si } x < 1\,, \\ 1/x & \text{si } x \geq 1\,. \end{cases}
$$

¿Se puede aplicar el teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo $[0, 2]$? En caso afirmativo, encuentra el punto/los puntos del enunciado del teorema.

Problema 4.13. La función $f(x) = 1 - x^{2/3}$ se anula en $x = -1$ y en $x = 1$. Sin embargo, $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (-1, 1)$. ¿Contradice este hecho el teorema de Rolle?

Problema 4.14. Sea $h(x)$ una función continua en $\mathbb{R}$ con $h'(x)$ y $h''(x)$ también continuas en $\mathbb{R}$. Considera

$$f(x) = \begin{cases} h(x)/x^2 & \text{si } x \neq 0\,, \\ 1 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

Suponiendo que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, calcula $h(0)$, $h'(0)$ y $h''(0)$.

Problema 4.15. Sea $f(x)$ una función continua en $\mathbb{R}$, con $f'(x)$ continua en $\mathbb{R}$, tal que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2x^3)}{5x^3} = 1\,.$$

- Demuestra que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 5/2\,.$
- Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(f(2x))}{3f^{-1}(x)}$ (suponiendo que f^{-1} existe).

Problema 4.16. Demuestra los siguientes teoremas.

TEOREMA 1. Sea f una función derivable en $[x_1, x_2]$. Si f tiene $k \geq 2$ raíces en $[x_1, x_2]$, entonces f' tiene al menos $k-1$ raíces en el mismo intervalo.

TEOREMA 2. Sea f una función k-veces derivable en $[x_1, x_2]$. Si f tiene $k+1 \geq 2$ raíces en $[x_1, x_2]$, entonces $f^{(k)}$ tiene al menos una raíz en el mismo intervalo.

Problema 4.17. Determina el número exacto de soluciones reales de las siguientes ecuaciones en el intervalo correspondiente.

$$\begin{aligned}
&1)\quad x^7 + 4x = 3\,, \quad \text{en } \mathbb{R}\,. \\
&2)\quad x^5 = 5x - 6\,, \quad \text{en } \mathbb{R}\,. \\
&3)\quad x^4 - 4x^3 = 1\,, \quad \text{en } \mathbb{R}\,. \\
&4)\quad \operatorname{sen}(x) = 2x - 1\,, \quad \text{en } \mathbb{R}\,. \\
&5)\quad x^2 = \ln(1/x)\,, \quad \text{en } (1, \infty)\,.
\end{aligned}$$

Problema 4.18. Calcula el valor de los siguientes límites.

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \operatorname{sen}(x) - 1}{x^2}\,.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\operatorname{sen}(7x))}{\ln(\operatorname{sen}(x))}\,.$