uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

POLINOMIO DE TAYLOR

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Problema 5.1. Aproxima los siguientes valores, con un error menor que ε, usando polinomios de Taylor adecuados.

- $\operatorname{sen}(1)\,, \quad \varepsilon = 10^{-5}\,.$
- $\sqrt[5]{\dfrac{3}{2}}\,, \quad \varepsilon = 10^{-2}\,.$

Problema 5.2. Escribe el polinomio de Maclaurin de grado n para las siguientes funciones.

a) $f(x) = \sqrt{1+x}\,, \quad n = 3\,.$

b) $f(x) = \operatorname{sen}(3x^2)\,, \quad n \in \mathbb{N}$ (genérico) .

c) $f(x) = \tan(x)\,, \quad n = 5\,.$

d) $f(x) = e^{-x^2}\cos(x)\,, \quad n = 3\,.$

e) $f(x) = (1+e^{x})^2\,, \quad n \in \mathbb{N}$ (genérico) .

Problema 5.3. Escribe el polinomio $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ en términos de potencias de $x - 4$.

Problema 5.4. Escribe la fórmula de Taylor de grado $n \in \mathbb{N}$ en el punto $a = -1$ para la función $f(x) = 1/x$.

Problema 5.5. Escribe el polinomio de Maclaurin de grado 5 para $f(x) = e^{x}\operatorname{sen}(x)$.

Problema 5.6. Calcula el coeficiente de x^4 en el polinomio de Maclaurin para la función $f(x) = \ln(\cos(x))$.

Problema 5.7. Calcula el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en $a = 0$ para las siguientes funciones.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen}(2x)\,. \\
f(x) &= e^{3x}\,. \\
f(x) &= x\,e^{-x}\,. \\
f(x) &= e^{x}\ln(1-x)\,. \\
f(x) &= \operatorname{sen}^2(x)\,. \\
f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2}\,\operatorname{sen}(x)}{1+\ln(1+x)}\,.
\end{aligned}$$

Problema 5.8. Calcula el polinomio de Taylor de grado $n \in \mathbb{N}$ centrado en $a = 0$ para las siguientes funciones ($a \in \mathbb{R}$ es un parámetro).

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos(ax)\,. \\
f(x) &= \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}\,. \\
f(x) &= e^{ax^2}\,. \\
f(x) &= \frac{1+x}{1-x}\,.
\end{aligned}$$

Problema 5.9. El polinomio de Taylor de grado 4 centrado en el punto $a = 1$ para una función $f(x)$ viene dado por $P_{4,1}(x) = 2(x-1)^3 - 3(x-1)^4$.

- Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$.
- Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{(x-1)^3}$.
- Calcula $f^{(4)}(1)$.

Problema 5.10. Demuestra lo siguiente.

$$\begin{aligned}
&\forall\, a < 1: \quad \operatorname{sen}(x) = o(x^a)\,, \quad \text{cuando } x \to 0\,. \\
&\ln(1+x^2) = o(x)\,, \quad \text{cuando } x \to 0\,. \\
&\tan(x) - \operatorname{sen}(x) = o(x^2)\,, \quad \text{cuando } x \to 0\,. \\
&\ln(x) = o(x)\,, \quad \text{cuando } x \to +\infty\,.
\end{aligned}$$

Problema 5.11. Encuentra un polinomio $P(x)$ tal que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^4} - P(x)}{x^7} = 0\,.$$

Problema 5.12. Aproxima $f(x) = \cos(x) + e^x$ por medio de un polinomio de grado 3 centrado en $a = 0$ y estima el error cometido para $x \in [-1/4, 1/4]$.

Problema 5.13. ¿Cuántos términos deberías usar en el polinomio de Maclaurin de $f(x) = e^x$ para conseguir una aproximación con tres decimales exactos, cuando $x \in [-1, 1]$?

Problema 5.14. Usando un polinomio de Taylor de grado 3, aproxima el valor

$$\frac{1}{\sqrt{1.1}}$$

y encuentra una cota superior del error cometido.

Problema 5.15. Calcula una aproximación de los siguientes valores, con un error menor que 10^{-3}, usando polinomios de Taylor adecuados.

- $\cos(1)$.
- e^{-2}.
- $\ln(2)$.

Problema 5.16. ¿Cuántos términos deberías usar en la serie de Taylor de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ centrada en $a = 0$ para calcular el valor $\operatorname{sen}(1/2)$ con un error menor que 10^{-12}?

Problema 5.17. Calcula los siguientes límites usando polinomios de Taylor.

a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - \operatorname{sen}(x) - 1}{x^2}$.

b) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x + x^3/6}{x^5}$.

c) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x}}{\operatorname{sen}(x)}$.

d) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\tan(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^3}$.

e) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x\,[1 - \cos(3x)]}$.

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) + e^{x} - x - 2}{x^3}$.

g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)$.

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right)$.

i) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$.

j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right]$.

Problema 5.18. Calcula los siguientes límites usando polinomios de Taylor o la regla de l'Hôpital, según el caso.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(e^{x} - 1)$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{x} - \arctan(x)}{\ln(1+x)}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x}$.

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^{a}}$, $a > 0$ $(a \in \mathbb{R})$.

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{e^{ax}}$, $a > 0$ $(a \in \mathbb{R})$.

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{1/x}$ (usa el cambio de variable $t = 1/x$).

g) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$.