COMPORTAMIENTO LOCAL Y GLOBAL DE UNA FUNCIÓN REAL

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Problema 6.1. Encuentra y clasifica los extremos *locales* de las siguientes funciones.

- $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$.
- $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$.
- $f(x) = x^2 e^{-2x}$.

Problema 6.2. Considera la función $f(x) = |x^3(x-4)| - 1$.

- Estudia donde $f(x)$ es (estrictamente) creciente o decreciente.
- Encuentra y clasifica los extremos *locales* de $f(x)$.
- Demuestra que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $x \in (0, 1)$.

Problema 6.3. ¿Cuál es el comportamiento *local* de la función $f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$, cerca de $x = 0$?

Problema 6.4. Estudia la concavidad de las siguientes funciones.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)\, x^{2/3} . \\ f(x) &= x\,(x-2)^{3/2} . \\ f(x) &= |x|\, e^{|x|} . \\ f(x) &= \ln(x^2 - 6x + 8) . \end{aligned}$$

Problema 6.5. Estudia el comportamiento *local* cerca de $x = 0$ de la función

$$f(x) \;=\; x^4 \,\sqrt{1+x^2}\; (\cos(2x)-1)^2 \;.$$

Problema 6.6. Sea

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \alpha + x + x^2 & \text{si} \quad x < 0\,, \\ \beta\,\mathrm{sen}(x) & \text{si} \quad x \geq 0\,, \end{cases}$$

donde α y β son parámetros reales.

- Encuentra los intervalos donde $f(x)$ es decreciente para $x < 0$.
- Encuentra los valores de α y β tales que $f(x)$ sea derivable en $x = 0$.
- Sean $\alpha = -1$ y $\beta = 1$. Encuentra y clasifica los extremos *globales* de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

Problema 6.7. Sea $f(x) \;=\; 3x^4 - 4x^3 + 1$.

- Encuentra y clasifica los puntos críticos de $f(x)$.
- Determina los intervalos donde $f(x)$ es creciente o decreciente.
- Calcula los puntos de inflexión de $f(x)$.
- Estudia la concavidad de $f(x)$.

Problema 6.8. Encuentra los extremos *globales* de las siguientes funciones en los intervalos indicados.

$$f(x) \;=\; \left|\frac{x}{\sqrt{2}}\right| + \cos(x)\,, \quad \text{con } x \in [-\pi, \pi]\,.$$

$$f(x) \;=\; 2x^{5/3} + 5x^{2/3}\,, \quad \text{con } x \in [-2, 1]\,.$$

Problema 6.9. Esboza la gráfica de las funciones $f(x) = e^x\,\mathrm{sen}(x)$ y $g(x) = x^2\,e^x$.

Problema 6.10. Esboza la gráfica de la función

$$f(x) \;=\; x + \ln\left(|x^2 - 1|\right) \;.$$

Además, sin hacer ningún cálculo adicional, esboza la gráfica de la función

$$g(x) \;=\; \left|\, x + \ln\left(|x^2 - 1|\right) \right| \;.$$