INTEGRACIÓN: TEOREMAS FUNDAMENTALES Y TÉCNICAS

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Problema 7.1. Calcula el área de la región del plano entre la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, el eje horizontal, y las rectas $x = \pi/2$ y $x = \pi$.

Problema 7.2. Calcula el área de la región del plano entre la gráfica de la función $f(x) = x/(x+1)$, el eje horizontal, y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Problema 7.3. Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } 0 \le x \le \pi/2\,, \\ -1 & \text{si } \pi/2 < x \le \pi\,. \end{cases}$$

Calcula

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

con $x \in [0, \pi]$ y compara $F'(x)$ con $f(x)$ para $x \in (0, \pi)$, donde $F'(x)$ existe.

Problema 7.4. Calcula la ecuación de la recta tangente en el punto $x = 1$ a la gráfica de

$$F(x) = \int_{-1}^x \frac{t^3}{t^4 - 4}\,dt\,.$$

Problema 7.5. Encuentra los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$F(x) = \int_1^x \arctan(e^t)\,dt$$

es inyectiva.

Problema 7.6. Calcula los siguientes límites.

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x \frac{|\cos(t^3)|}{t^2+1}\,dt\,.$ b) $\displaystyle \lim_{x\to \infty} \frac{1}{x}\int_0^x \frac{|\cos(t^3)|}{t^2+1}\,dt\,.$

Problema 7.7. Calcula, si existen, la primera y la segunda derivada de la función

$$H(x) = x\int_{2x}^{3x} e^{-t^2}\,dt\,.$$

Problema 7.8. Demuestra que la función

$$H(x) = \int_{1-x}^{1+x} \ln(t)\,dt$$

es decreciente para $x \in [0, 1/2]$.

Problema 7.9. Encuentra los extremos globales de la función

$$H(x) = \int_{5-2x}^{1} e^{-t^4}\,dt$$

en el intervalo $[1, 3]$. Además, demuestra que el máximo valor de $H(x)$ es mayor que $2/3$.

Problema 7.10. Calcula los siguientes límites.

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{3/2}}\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^{1/4})\,dt\,.$ b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt - x}{x^3}\,.$

Problema 7.11.

- Demuestra que
$$F(x) = \int_0^x \Big(1 + \operatorname{sen}\big(\operatorname{sen}(t)\big)\Big)\,dt$$
es inyectiva y que $F(0) = 0$. Luego, calcula $(F^{-1})'(0)$.

- Considera la función

$$G(x) = \int_1^x \operatorname{sen}\big(\operatorname{sen}(t)\big)\,dt\,.$$

Demuestra que $G(x)$ es par, es decir $G(x) = G(-x)$.

Problema 7.12. Escribe el polinomio de Taylor de grado 3 en $a = 0$ para

$$F(x) = \int_0^x t^2 \cos(t^2)\,dt$$

y úsalo para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^3}\,.$$

Problema 7.13. Calcula la derivada primera de las siguientes funciones.

a) $$H(x) = \int_3^{\left(\int_1^x \operatorname{sen}^3(t)\,dt\right)} \frac{dt}{1 + t^2 + \operatorname{sen}^6(t)}\,.$$

b) $$K(x) = \operatorname{sen}\left(\int_0^x \operatorname{sen}\left(\int_0^t \operatorname{sen}^3(s)\,ds\right)\,dt\right)\,.$$

Problema 7.14. Calcula las siguientes integrales indefinidas.

$$\int \arctan(3x)\,dx\,.$$

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx\,.$$

$$\int \cos(\ln(x))\,dx\,.$$

$$\int \cos^2(\ln(x))\,dx\,.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 4}}\,.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}\,.$$

Problema 7.15. Calcula las siguientes integrales usando los cambios de variable apropiados.

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\,dt\,.$$
$$\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^{t}-1}\,dt\,.$$
$$\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{1+x}}\,.$$
$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{1-x}}\,.$$

Problema 7.16. Calcula las siguientes integrales de funciones racionales.

$$\int \frac{dx}{3x^2+4x+2}\,.$$
$$\int \frac{x^5-2x^3}{x^4-2x^2+1}\,dx\,.$$
$$\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2}\,dx\,.$$
$$\int \frac{x^3+1}{x^2+4x+13}\,dx\,.$$
$$\int \frac{x^2+6x-1}{x^3-7x^2+15x-9}\,dx\,.$$

Problema 7.17. Calcula las siguientes integrales usando las sugerencias indicadas.

a) $\displaystyle\int \cos^3(x)\,dx$ (cambio de variable $u=\operatorname{sen}(x)$).

b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4(x)\,dx$ (identidades $\cos(2\alpha) = 1-2\operatorname{sen}^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha)-1$).

c) $\displaystyle\int \frac{e^{4x}}{e^{2x}+2e^{x}+2}\,dx$ (cambio de variable $u=e^{x}$).

d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$ (cambio de variable $u=\cos(x)$).

e) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx\,,\ a\in\mathbb{R}$ (cambio de variable $x=a\operatorname{sen}(u)$).