

INTEGRALES IMPROPIAS

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Problema 8.1. Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias.

$$\begin{aligned} & \int_3^{+\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x} dx. \\ & \int_1^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) dx. \\ & \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+x^3} dx. \\ & \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \sqrt{1+x^2}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0. \\ & \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \right) dx. \\ & \int_2^7 \frac{dx}{x^3 - 8}. \\ & \int_0^2 \frac{\arctan(x)}{x+x^2} dx. \\ & \int_1^2 \frac{\ln(x) + x - 1}{(x-1)^{3/2}} dx. \\ & \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4 - 1}} dx. \\ & \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^3 \ln(x)} dx. \end{aligned}$$

Problema 8.2. Analiza la convergencia de las siguientes integrales impropias.

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} e^{-x} dx. \\ & \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx, \quad \lambda > 0.$$

$$\int_0^{+\infty} \lambda x^n e^{-\lambda x} dx, \quad \lambda > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Problema 8.3. Analiza la convergencia de las siguientes integrales impropias.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-3)^2}{4}} dx.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-3)^n e^{-\frac{(x-3)^2}{4}} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Problema 8.4. Analiza la convergencia de las siguientes integrales impropias.

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{x} dx, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Problema 8.5. Analiza la convergencia de la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0.$$

Problema 8.6. Analiza si las siguientes integrales impropias son convergentes.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}.$$

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx, \quad \alpha, \beta > 0.$$
$$\int_0^1 x^n x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx, \quad \alpha, \beta > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Problema 8.7. Analiza la convergencia de la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} x^{\frac{n_1}{2}-1} \left(1 + \frac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} dx, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{N}.$$