SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

SUCESIONES Y SERIES DE NÚMEROS REALES

Problema 2.1.

a) Acotada; no monótona; no convergente.

b) Acotada; no monótona; convergente a 0 (por ejemplo, usa las propiedades del límite o el criterio del sándwich).

c) Acotada; monótona; convergente a 1.

d) Acotada; no monótona; convergente a $1/2$.

e) Acotada; no monótona para cualquier x; convergente a x (por ejemplo, usa el criterio del sándwich).

f) Acotada; no monótona; convergente a $1/2$ (por ejemplo, usa el criterio del sándwich).

g) Acotada; monótona; convergente a π.

h) Acotada; monótona para $n \geq 2$; convergente a $1/2$ (por ejemplo, considera la fórmula para la suma de los n primeros números naturales).

Problema 2.2.

a) La sucesión converge a 0.

b) La sucesión converge a 0 (por ejemplo, usa el criterio del sándwich).

c) La sucesión diverge.

d) La sucesión converge a 0.

e) La sucesión converge a $1/3$.

Problema 2.3.

a) La sucesión puede escribirse como $a_n = \sqrt{3\, a_{n-1}} \;\; \forall n \geq 2\,, \;\; a_1 = \sqrt{3}\,$. Usa el principio de inducción para demostrar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Además, la sucesión es creciente y converge a 3.

b) Usa el principio de inducción para demostrar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Además, la sucesión es creciente y converge a 20/3.

c) Usa el principio de inducción para demostrar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Además, la sucesión es decreciente y converge a $1/3$.

d) Usa el principio de inducción para demostrar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Además, la sucesión es creciente y converge a 3.

Problema 2.4.

a) El límite es 1 (notése que $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$ cuando $n \to \infty$).

b) El límite es 1 (notése que $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$ cuando $n \to \infty$).

c) El límite es $e^{1/3}$ (notése que $(1 + a_n)^{1/a_n} \longrightarrow e$ cuando $n \to \infty$, si $a_n \to 0$).

Problema 2.5.

a) Serie telescopica convergente (la suma de la serie es 1).

b) Convergente (por el criterio de comparación con $b_k = 5/k^2$).

c) Divergente (por el criterio de comparación con $a_k = 1/k$).

d) Convergente (por el criterio de comparación al límite con $b_k = 1/k^{3/2}$).

e) Convergente (por el criterio de comparación al límite con $b_k = 1/k^2$).

f) Convergente (por el criterio de comparación al límite con $b_k = (2/3)^k$).

g) Convergente (por el criterio de comparación al límite con $b_k = 1/k^3$).

h) Divergente (por el criterio de comparación con $a_k = 1/k$).

i) Convergente (por el criterio de comparación al límite con $b_k = 1/k^{3/2}$).

j) Divergente (por el criterio de comparación con $a_k = 1/k$).

Problema 2.6.

a) Serie alternada: convergente por el criterio de Leibniz.

b) Convergente (considera la serie de $|a_k|$ y usa el criterio de comparación con $b_k = (1/5)^k$).

c) Serie alternada: convergente por el criterio de Leibniz.

d) Convergente (por el criterio del cociente).

e) Divergente (por el criterio de la raíz).

f) Convergente (por el criterio de la raíz).

g) Convergente (por el criterio del cociente).

h) Serie telescopica divergente.

Problema 2.7.

a) Convergente para $|b| > 1$ y $a > 0$, divergente para $|b| < 1$ y $a > 0$ (usa el criterio del cociente). Divergente para $b = \pm 1$ ($a > 0$) pues el término general de la serie no tiende a cero cuando $k \to \infty$.

b) Convergente para todo $b \in \mathbb{R}$ (por el criterio del cociente).

c) Convergente para $|\alpha| < \sqrt[3]{7}/2$ y divergente para $|\alpha| > \sqrt[3]{7}/2$ (usa el criterio del cociente). Si $\alpha = \sqrt[3]{7}/2$, la serie es convergente por el criterio de Leibniz; si $\alpha = -\sqrt[3]{7}/2$, la serie es divergente (por el criterio de comparación al límite con $b_k = 1/k^{2/3}$).