uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

FUNCIONES REALES: LÍMITES Y CONTINUIDAD

Problema 3.2.

1) El dominio es $\mathbb{R}$, la imágen es $\mathbb{Z}$ y $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
2) El dominio es $\mathbb{R}$, la imágen es $[0, 1)$ y $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
3) El dominio es $\mathbb{R}$, la imágen es $[0, 1)$ y $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
4) El dominio es $\mathbb{R}$, la imágen es $\mathbb{R}$ y $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.
5) El dominio es $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, la imágen es $\mathbb{Z}$ y $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}\setminus\left\{0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \ldots\right\}$.

Problema 3.3.

1) La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.
2) La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.
3) La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
4) La función $f(x)$ es continua en $[-1, 1]$.
5) La función $f(x)$ es continua en $(4/9, +\infty)$.
6) La función $f(x)$ es continua en $(4/9, 1]$.

Problema 3.4.

- La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ porque es el producto de funciones continuas ($\cos(1/x)$ es una composición de funciones continuas). En $x = 0$, la función $f(x)$ es continua también pues $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$.

- La función $g(x)$ es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ siendo composición de funciones continuas. En $x = 1$, la función $g(x)$ es continua también pues $\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^-} g(x) = g(1) = 0$. En $x = 0$, la función $g(x)$ no es continua pues $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0$ y $\lim_{x \to 0^-} g(x) = 1$, esto es el límite de $g(x)$ cuando $x \to 0$ no existe.

- La función $h(x)$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ siendo suma de funciones continuas. En $x = 0$, la función $h(x)$ no es continua pues $\lim_{x \to 0^+} h(x) = 1$ y $\lim_{x \to 0^-} h(x) = 5$, esto es el límite de $h(x)$ cuando $x \to 0$ no existe.

Problema 3.5. Para demostrar que la función $f(x)$ es acotada en el intervalo $[-7, 5]$ (cerrado y acotado), podemos probar que es continua. Así pues, $f(x)$ es continua en $[-7, 0) \cup (0, 5]$ porque es composición de funciones continuas. En $x = 0$, $f(x)$ es continua también pues $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0$. Finalmente, podemos afirmar que $f(x)$ es continua y entonces acotada en $[-7, 5]$.

Problema 3.6. Aplica el teorema de Bolzano a la función $f(x) = \cos(x) - x$ en un intervalo apropiado, por ejemplo en $[0, 1]$.

Problema 3.7.

1) Aplica el teorema de Bolzano a la función $F(x) = f(x) - x$ en $[0, 1]$.

2) Aplica el teorema de Bolzano a la función $F(x) = f(x) - g(x)$ en $[x_1, x_2]$.