uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

FUNCIONES REALES: DERIVABILIDAD

Problema 4.1. La función $f(x)$ es continua en $x = 0$ pues $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ (el l ímite puede calcularse teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}(1/x)$ está acotada). Además, $f(x)$ es derivable en $x = 0$ pues $\lim_{h\to 0} [f(0+h) - f(0)]/h$ existe y vale 0.

Problema 4.2. La función $f(x)$ es continua en $[-2,-1]$ y derivable en $(-2,-1)$.

Problema 4.3.

1) $f'(x) = \dfrac{6x-7}{2\sqrt{3x^2-7x-2}}$.

2) $f'(x) = x\operatorname{sen}(x)\left(2\tan(x) + x + \dfrac{x}{\cos^2(x)}\right)$.

3) $f'(x) = \dfrac{2}{3(x-1)^{2/3}(x+1)^{4/3}}$.

4) $f'(x) = \dfrac{-\operatorname{sen}(x)\,\cos\left(\sqrt{1+\cos(x)}\right)}{2\sqrt{1+\cos(x)}}$.

5) $f'(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{\tan(x)} - \dfrac{1}{2x+2}$.

Problema 4.4. La ecuación de la recta tangente es $y = -2x + 7$.

Problema 4.5.

- Para $x \neq 0$, $f(x)$ es derivable y $f'(x) = 1/(3x^{2/3})$. En $x = 0$, $f(x)$ no es derivable.
- Para $x \neq 0$, $f(x)$ es derivable y $f'(x) = 1/x$. En $x = 0$, $f(x)$ no es derivable.

Problema 4.6. La función $f(x)$ es derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ pues está definida en términos de funciones elementales derivables (además $f'(x)$ en los tres intervalos se obtiene derivando las correspondientes funciones). En $x = 0$, podemos escribir $\lim_{h\to 0^+} [f(0+h) - f(0)]/h = \lim_{h\to 0^-} [f(0+h) - f(0)]/h = 0$, así pues $f(x)$ es derivable y $f'(0) = 0$. En $x = 1$, la función $f(x)$ no es continua (por tanto no es derivable) pues $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \pi/4$ y $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$, esto es el límite de $f(x)$ cuando $x \to 1$ no existe.

Problema 4.7. Por la regla de la cadena obtenemos las siguientes expresiones.

1) $h'(x) = f'(g(x))\, g'(x)\, e^{f(x)} + f(g(x))\, f'(x)\, e^{f(x)}$.

2) $h'(x) = \dfrac{-f'(x) - 2g(x)g'(x)}{(f(x) + g^2(x))\ln^2(f(x) + g^2(x))}$.

3) $h'(x) = \dfrac{f(x)f'(x) + g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}}$.

4) $h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{f^2(x) + g^2(x)}$.

5) $h'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)} - f'(x)\tan(f(x))$.

Problema 4.8. En cada caso, calcula las derivadas de $f(x)$ necesarias y sustituye sus expresiones en el lado izquierdo de la ecuación diferencial.

Problema 4.9. En cada igualdad, calcula la derivada de la función de la izquierda y comprueba que es igual a cero para todos los valores de x considerados. Como consecuencia, la función involucrada tiene que ser constante para esos valores de x. Por tanto, para demostrar la igualdad, podemos evaluar dicha función en un punto x adecuado.

Problema 4.10. La pendiente de la recta tangente por la derecha se calcula como $\lim_{h\to 0^+} [f(0+h) - f(0)]/h = 0$; así pues dicha recta tangente es paralela al eje x. Por otra parte, la pendiente de la recta tangente por la izquierda se calcula como $\lim_{h\to 0^-} [f(0+h) - f(0)]/h = 1$; así pues dicha recta tangente es paralela a la recta $y = x$. Como consecuencia, las dos rectas tangentes forman un angulo de $\pi/4$.

Problema 4.11.

- Para $x \neq 0$, tenemos que $f_1'(x) = k\,x\,|x|^{k-2}$ y $f_2'(x) = k\,|x|^{k-1}$.
- Usando la definición de derivabilidad, se obtiene $f_1'(0) = f_2'(0) = 0$.
- De $0 \leq |f(x)| \leq |x|^k$ para $x = 0$, deducimos que $f(0) = 0$. Además, tenemos que $0 \leq |f(x)\,/\,x| \leq |x|^{k-1}$ para todo $x \neq 0$ cercano a $x_0 = 0$, que implica $f'(0) = \lim_{x\to 0} f(x)\,/\,x = 0$ (aplica el criterio del sándwich, recordando que $k > 1$).

Problema 4.12. La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ con $f(1) = 1$ y derivable en $\mathbb{R}$ con $f'(1) = -1$. En el intervalo $[0, 2]$, todas las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange se cumplen y los puntos del enunciado del teorema (esto es los puntos $c \in (0, 2)$ donde $f'(c) = [f(2) - f(0)]/2$) son $c = 1/2,\ \sqrt{2}$.

Problema 4.13. La función $f(x)$ cumple todas las hipótesis del teorema de Rolle a excepción de la derivabilidad en el intervalo $(-1, 1)$. De hecho, $f'(0)$ no existe. Así pues, dicho teorema no puede aplicarse en este caso.

Problema 4.14. Los valores buscados son $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$, $h''(0) = 2$. Todos se obtienen observando que $\lim_{x\to 0} h(x)/x^2 = f(0) = 1$ (siendo $f(x)$ continua en

$x = 0$) y usando dicho límite en las definiciones de continuidad y derivabilidad (primera y segunda) de $h(x)$ en $x = 0$.

Problema 4.15. Siendo $f(x)$ continua en $x = 0$, tenemos que $\lim_{x\to 0} f(2x^3) = f(0)$. Así pues, como el límite dado es finito, $f(0) = 0$. El valor $f'(0) = 5/2$ se obtiene usando el límite dado en la definición de derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$. Por otra parte, tenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(f(2x))}{3f^{-1}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(f(2x))}{f(2x)} \lim_{x\to 0} \frac{f(2x)}{x} \lim_{x\to 0} \frac{x}{3f^{-1}(x)},$$

donde cada uno de los límites de la derecha se puede transformar (con un cambio de variable) en $\lim_{t\to 0} f(t)/t = f'(0) = 5/2$. El valor del límite buscado es entonces $125/12$.

Problema 4.16.

TEOREMA 1. Supongamos que f se anula en $k \geq 2$ puntos, $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$, en $[x_1, x_2]$. Así pues, tenemos $k-1$ subintervalos $[\bar{x}_1, \bar{x}_2], [\bar{x}_2, \bar{x}_3], \dots, [\bar{x}_{k-1}, \bar{x}_k]$ donde f verifica las hipótesis del teorema de Rolle. Entonces, existen $k-1$ puntos en $[x_1, x_2]$ (uno en cada subintervalo) donde f' se anula.

TEOREMA 2. El enunciado se demuestra aplicando repetidamente el TEOREMA 1 a $f, f', f'', \dots, f^{(k-1)}$.

Problema 4.17. Escribe las ecuaciones dadas como $f(x) = 0$, donde $f(x)$ es una función a definir de forma oportuna en cada caso. Luego, estudia el signo de $f'(x)$ en los intervalos indicados.

1) 1 solución real.

2) 1 solución real.

3) 2 soluciones reales.

4) 1 solución real.

5) 0 soluciones reales.

Problema 4.18.

- El valor del límite es $1/2$ (usa la regla de l'Hôpital dos veces).
- El valor del límite es 1 (usa la regla de l'Hôpital dos veces).