uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

INTEGRACIÓN: TEOREMAS FUNDAMENTALES Y TÉCNICAS

Problema 7.1. El área es igual a 1 .

Problema 7.2. El área es igual a $2 - \ln(3)$.

Problema 7.3. Tenemos que

$$F(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{si } \ 0 \leq x \leq \pi/2\,, \\ 1 + \pi/2 - x & \text{si } \ \pi/2 < x \leq \pi\,. \end{cases}$$

Además, gracias al Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (0, \pi)$ con $x \neq \pi/2$ (de hecho $F(x)$ no es derivable en $x = \pi/2$).

Problema 7.4. La ecuación de la recta tangente es

$$y = F(1) + F'(1)(x-1) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\,.$$

Problema 7.5. La función $F(x)$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ porque $F'(x) > 0$. Entonces, $F(x)$ es inyectiva para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 7.6.

a) El valor del límite es 1 (por ejemplo, usa la regla de l'Hôpital).

b) El valor del límite es 0 (por ejemplo, usa el criterio del sándwich).

Problema 7.7. Tenemos que

$$H'(x) = \int_{2x}^{3x} e^{-t^2}\,dt + x\left\{3e^{-9x^2} - 2e^{-4x^2}\right\},$$

$$H''(x) = 2\left\{3e^{-9x^2} - 2e^{-4x^2}\right\} + 2x^2\left\{8e^{-4x^2} - 27e^{-9x^2}\right\}.$$

Problema 7.8. $H(x)$ es decreciente en $[0, 1/2]$ pues $H'(x) = \ln(1-x^2) < 0$ en ese intervalo.

Problema 7.9. El máximo global se alcanza en $x = 3$ y el mínimo global se alcanza en $x = 1$. Además

$$H(3) = 2\int_0^1 e^{-t^4}\,dt > 2\int_0^1 e^{-1}\,dt = \frac{2}{e} > \frac{2}{3}.$$

Problema 7.10. Usando polinomios de Taylor adecuados, tenemos que

a) 0.

b) $1/3$.

Problema 7.11.

- Tenemos que $F'(x) = 1 + \mathrm{sen}(\mathrm{sen}(x)) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces, $F(x)$ es estrictamente creciente e inyectiva en $\mathbb{R}$. Además, es fácil ver que $F(0) = 0$ y por tanto $F^{-1}(0) = 0$. Como consecuencia, se obtiene que

$$(F^{-1})'(0) = \frac{1}{F'(0)} = \frac{1}{1 + \mathrm{sen}(\mathrm{sen}(0))} = 1.$$

- Se observe que

$$G(x) = \int_1^0 \mathrm{sen}(\mathrm{sen}(t))\,dt + \int_0^x \mathrm{sen}(\mathrm{sen}(t))\,dt,$$

donde la primera integral es independiente de x (digamos igual a $G_0 \in \mathbb{R}$) y la segunda integral es una función $H(x)$ invariante bajo el cambio x con $-x$ (se puede demostrar aplicando el cambio de variable $u = -t$). Como consecuencia, tenemos que $G(-x) = G_0 + H(-x) = G_0 + H(x) = G(x)$.

Problema 7.12. El polinomio de Taylor deseado es $P_3(x) = x^3/3$ y el valor del límite es $1/3$.

Problema 7.13.

a) $$H'(x) = \operatorname{sen}^3(x)\left\{1+\left(\int_1^x \operatorname{sen}^3(t)\,dt\right)^2+\operatorname{sen}^6\left(\int_1^x \operatorname{sen}^3(t)\,dt\right)\right\}^{-1}.$$

b) $$K'(x) = \cos\left(\int_0^x \operatorname{sen}\left(\int_0^t \operatorname{sen}^3(s)\,ds\right)\,dt\right)\operatorname{sen}\left(\int_0^x \operatorname{sen}^3(s)\,ds\right).$$

Problema 7.14. En cado caso, la integral $I(x)$ tiene la expresión indicada ($k \in \mathbb{R}$).

- $I(x) = x\arctan(3x) - \dfrac{1}{6}\ln(|1+9x^2|) + k$ (integración por partes).
- $I(x) = \dfrac{1}{2}e^x(\operatorname{sen}(x) - \cos(x)) + k$ (integración por partes, cíclica).
- $I(x) = \dfrac{1}{2}x\left(\cos(\ln(x)) + \operatorname{sen}(\ln(x))\right) + k$ (cambio de variable $t = \ln(x)$ e integración por partes).
- $I(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{10}\cos(2\ln(x)) + \dfrac{x}{5}\operatorname{sen}(2\ln(x)) + k$ (cambio de variable $t = \ln(x)$, identidad $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$ e integración por partes).
- $I(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{e^x - 4}\right) + k$ (cambio de variable $t = \sqrt{e^x-4}$).
- $I(x) = \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right) + k$ (cambio de variable $t = \sqrt{x^2-1}$).

Problema 7.15. En cada caso, la integral $I(x)$ tiene la expresión indicada ($k \in \mathbb{R}$).

- $I = \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}$ (cambio de variable $u = \sqrt{t^2-1}$).
- $I = 2 - \dfrac{\pi}{2}$ (cambio de variable $u = \sqrt{e^t - 1}$).
- $I(x) = 2\arctan\left(\sqrt{1+x}\right) + k$ (cambio de variable $t = \sqrt{1+x}$).
- $I(x) = -\dfrac{3}{2}(1-x)^{2/3} + 3(1-x)^{1/3} - 3\ln\left(|(1-x)^{1/3}+1|\right) + k$ (cambio de variable $t = (1-x)^{1/3}$).

Problema 7.16. En cada caso, la integral $I(x)$ tiene la expresión indicada ($k \in \mathbb{R}$).

- $I(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}\right) + k\,.$
- $I(x) = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2}x^2 + k\,.$
- $I(x) = \dfrac{1}{x} + \ln(|x-1|) - \ln(|x+1|) + k\,.$
- $I(x) = \dfrac{3}{2}\ln(x^2+4x+13) + \dfrac{47}{3}\arctan\left(\dfrac{x+2}{3}\right) + \dfrac{1}{2}x^2 - 4x + k\,.$
- $I(x) = \dfrac{3}{2}\ln(|x-1|) - \dfrac{1}{2}\ln(|x-3|) - \dfrac{13}{x-3} + k\,.$

Problema 7.17. En cada caso, la integral $I(x)$ tiene la expresión indicada ($k \in \mathbb{R}$).

a) $I(x) = \operatorname{sen}(x) - \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3(x) + k\,.$

b) $I(x) = \dfrac{3}{8}x - \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \dfrac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + k\,.$

c) $I(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + \ln(e^{2x} + 2e^x + 2) + 2\arctan(e^x + 1) + k\,.$

d) $I(x) = \cos(x) - 2\arctan(\cos(x)) + k\,.$

e) $I(x) = \dfrac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{x}{a}\right) + \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + k\,.$