uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

INTEGRALES IMPROPIAS

Problema 8.1.

- Divergente (por la definición de integral impropia) .
- Divergente (por el criterio de comparación al límite con $\int_1^{+\infty} dx/x$) .
- Convergente (por el criterio de comparación con $\int_1^{+\infty} dx/x^3$ para demostrar la convergencia absoluta) .
- Convergente (por el criterio de comparación al límite con $\int_1^{+\infty} dx/x^{\alpha+1}$) .
- Convergente (por el criterio de comparación al límite con $\int_1^{+\infty} dx/x^{3/2}$) .
- Divergente (por el criterio de comparación al límite con $\int_2^{7} dx/(x-2)$) .
- No es una integral impropia .
- Convergente (por el criterio de comparación al límite con $\int_1^{2} dx/(x-1)^{1/2}$) .
- Divergente. Podemos escribir la integral dada como

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^4-1}}\,dx + \int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4-1}}\,dx\,,$$

donde la primera integral converge (por el criterio de comparación al límite con $\int_1^2 dx/(x-1)^{1/2}$) pero la segunda diverge (por el criterio de comparación al límite con $\int_2^{+\infty} dx/x$).

- Divergente. Podemos escribir la integral dada como

$$\int_0^{1/2} f(x)\,dx + \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx + \int_1^{3/2} f(x)\,dx + \int_{3/2}^{+\infty} f(x)\,dx\,,$$

donde $f(x) = (1-\cos(x))/(x^3 \ln(x))$ y la tercera integral es divergente (por el criterio de comparación al límite con $\int_1^{3/2} dx/(x-1)$).

Problema 8.2. Se puede demostrar que todas las integrales impropias convergen, usando por ejemplo las siguientes sugerencias.

- Aplica la definición de integral impropia.
- Usa el principio de inducción y la definición de integral impropia.
- Aplica la definición de integral impropia.
- Usa el cambio de variable $t = \lambda x$ para reducir la integral impropia al caso $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$.

Problema 8.3. Se puede demostrar que todas las integrales impropias convergen, usando por ejemplo las siguientes sugerencias.

- Se observe que e^{-x^2} es par y la integral puede escribirse como $2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$, que converge por el criterio de comparación al límite con $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$.
- Si n es impar, entonces el integrando es impar y la integral es igual a cero. Si n es par, entonces la integral es igual a $2\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx$ y converge por el criterio de comparación al límite con $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$, que se estudia en el Problema 8.2.

- Aplica el cambio de variable $t = (x-3)/2$ y usa el resultado en el primer punto.

- Aplica el cambio de variable $t = (x-3)/2$ y usa el resultado en el segundo punto.

- Aplica el cambio de variable $t = (x-\mu)/(\sqrt{2}\sigma)$ y usa el resultado en el primer punto.

- Aplicando el cambio de variable $t = (x-\mu)/(\sqrt{2}\sigma)$ se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sqrt{2}\sigma t+\mu\right)^{n} e^{-t^2}\,dt \;=\; \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k/2}\sigma^{k}\mu^{n-k}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{k}\,e^{-t^2}\,dt\,,$$

  donde en la última igualdad se ha usado la fórmula del binomio de Newton. Finalmente, la integral dada converge pues $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t^2}\,dt$ converge (para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$) como se vio anteriormente.

Problema 8.4. Se puede demostrar que todas las integrales impropias convergen, usando por ejemplo las siguientes sugerencias.

- Aplica el cambio de variable $t = (\ln(x)-\mu)/(\sqrt{2}\sigma)$ para reducir la integral impropia a un caso estudiado en el Problema 8.3.

- Usa el cambio de variable $t = (\ln(x)-\mu)/(\sqrt{2}\sigma)$ y el criterio de comparación al límite con $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}\,dt$.

Problema 8.5. La integral puede escribirse como $\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$, donde la primera integral converge por el criterio de comparación al límite con $\int_0^1 dx/x^{1-\alpha}$ y la segunda integral converge por el criterio de comparación al límite con $\int_1^{+\infty} dx/x^2$.

Problema 8.6. Se puede demostrar que todas las integrales impropias convergen, usando por ejemplo las siguientes sugerencias.

- Como en el caso siguiente con $\alpha = \beta = 1/2$.

- La integral puede escribirse como

$$\int_0^{1/2} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx \;+\; \int_{1/2}^{1} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx\,,$$

  donde la primera integral converge por comparación al límite con $\int_0^{1/2} dx/x^{1-\alpha}$ y la segunda converge por comparación al límite con $\int_{1/2}^{1} dx/(1-x)^{1-\beta}$.

- Como en el caso anterior, por comparación al límite con $\int_0^{1/2} dx/x^{1-\alpha-n}$ para la primera integral resultante y con $\int_{1/2}^1 dx/(1-x)^{1-\beta}$ para la segunda integral resultante.

Problema 8.7. La integral puede escribirse como

$$\int_0^1 x^{\frac{n_1}{2}-1}\left(1+\frac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} dx + \int_1^{+\infty} x^{\frac{n_1}{2}-1}\left(1+\frac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} dx\,,$$

donde la primera integral converge por comparación al límite con $\int_0^1 dx/x^{1-n_1/2}$ y la segunda converge por comparación al límite con $\int_1^{+\infty} dx/x^{1+n_2/2}$.