CÁLCULO – AUTOEVALUACIÓN 11

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Problema 1. Paradoja de Aquiles y la tortuga

Aquiles y una tortuga deciden competir en una carrera. Confiado en su superioridad, Aquiles le da ventaja a la tortuga, pero cuando llega a la posición desde donde salió la tortuga, ésta ha avanzado un poco. Entonces Aquiles sigue corriendo hasta ese punto, pero al llegar ve que la tortuga ha avanzado otro poco.

Repitiendo este razonamiento infinitas veces, parece que Aquiles nunca puede alcanzar a la tortuga. Sin embargo, Aquiles alcanza a la tortuga si el tiempo empleado en los infinitos pasos es un valor finito.

Supongamos que la tortuga sale una distancia L por delante, que la velocidad de Aquiles es v_A y que la velocidad de la tortuga es v_T (con $L, v_A, v_T \in \mathbb{R}$). Pues el tiempo total t transcurrido en los infinitos pasos es

$$t = \frac{L}{v_A}\left(1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots\right), \quad \text{con } r = \frac{v_T}{v_A}.$$

- ¿Qué tipo de serie es?
- Discute su convergencia en función de v_A y v_T.
- En el caso en que Aquiles alcanza a la tortuga, calcula el tiempo t que tarda en hacerlo.

Problema 2. Demuestra que la función

$$f(x) = \begin{cases} (x^3 - 3x + 1)\ \ln(1 + x^2) & \text{si } -1 \leq x \leq 0\,, \\ e^{-1/x^2} - \arctan(3^x - 1) & \text{si } 0 < x \leq 1\,, \end{cases}$$

es acotada en su dominio.

Problema 3. Sea $F(x) = \int_0^{\operatorname{sen}(x)} \frac{1 - \operatorname{arc\,sen}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$, con $x \in (0, \pi/2)$.

(a) Calcula y clasifica los extremos *locales* de $F(x)$.

(b) Usando un polinomio de Taylor de grado 2 para $F(x)$, calcula $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{F(x) - x}{7x^2}$.

Problema 4. Calcula $\int \frac{3e^{2x} + 7e^{x}}{e^{2x} + 4e^{x} + 5}\, dx$, usando el cambio de variable $u = e^{x}$.

Problema 5. Estudia la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}\,dx$.
