

CÁLCULO – AUTOEVALUACIÓN 12

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Problema 1. Considera la sucesión monótona *creciente* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por la siguiente fórmula de recurrencia

$$a_0 = 1, \\ a_n = \sqrt{\frac{2 + 3a_{n-1}}{2}}, \quad \text{con } n \geq 1.$$

- (a) Demuestra que la sucesión es acotada.
- (b) Calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
-

Problema 2. Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\pi}{2} & \text{si } x \neq 0, \\ \pi & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Demuestra que la función $f(x)$ es derivable para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Encuentra para que valores de $x \in \mathbb{R}$ la función $f(x)$ es creciente.
-

Problema 3. Sea $F(x) = \int_0^{x^3} \ln\left(t^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\right) dt$.

- (a) Encuentra y clasifica los extremos *locales* de $F(x)$ para $x \in (0, 1)$.
 - (b) Usa el polinomio de Maclaurin de grado 3 asociado a $F(x)$ para estimar $F(0,2)$.
-

Problema 4. Calcula $\int_e^5 \frac{dx}{x \ln(x)}$.

Problema 5. Estudia la convergencia de la integral impropia $\int_0^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x+x^2} dx$.
