uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

CÁLCULO – AUTOEVALUACIÓN 8

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Problema 1. Resuelve las siguientes cuestiones.

(a) Considera la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$a_1 = \frac{1}{2}\,; \qquad a_{n+1} = (a_n)^2 + \frac{4}{25}\,, \quad \text{con } n \geq 1\,.$$

Demuestra que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ existe y calcula su valor.

(b) Estudia la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n^4)}{\sqrt{n^4+1}}$.

Problema 2. Considera

$$f(x) \;=\; \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} + \beta\, x\,, & \text{si } \; x < 0\,, \\[2ex] \beta\,\mathrm{sen}(x) - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}^2(x)\,, & \text{si } \; x \geq 0\,, \end{cases}$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

(a) Encuentra para que valores de β la función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$.

(b) Encuentra, si existe, el valor de β tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x_0 = 0$ es paralela a la recta $y = 3x - 7$.

Problema 3. Aproxima el valor $\sqrt[3]{1010}$ mediante el polinomio de Taylor de grado 3 para la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $a = 1000$. Luego, estima el error de aproximación involucrado.

Problema 4. Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^{e^{-x}} \frac{1}{\ln(t)}\, dt$.

(a) Encuentra, si existen, máximo y mínimo globales de $F(x)$ en el intervalo $x \in [1, 2]$.

(b) Calcula $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\, F(x)$.

Problema 5. Calcula las siguientes integrales indefinidas.

(a) $\displaystyle\int x^2 \, e^{-3x} \, dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - x + 1} \, dx$

Problema 6. Considera la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} (x+1)^p \, e^{-x^2} dx$.

(a) Estudia su convergencia para $p = 2$.

(b) Sabiendo que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calcula su valor para $p = 1$.
