CÁLCULO – AUTOEVALUACIÓN 1

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Problema 1. Considera la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales definida por

$$\begin{aligned} a_n &= -4 + \frac{a_{n-1}}{3}, \quad \text{con } n \geq 2, \\ a_1 &= 0. \end{aligned}$$

(a) Demuestra que la sucesión es decreciente.

(b) Demuestra que la sucesión es acotada.

(c) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

SOLUCIÓN

Se observe que

$$a_2 = -4, \quad a_3 = -4 - \frac{4}{3}, \quad a_4 = -4 - \frac{4}{3} - \frac{4}{9}, \quad \dots,$$

por tanto, para todo $n \geq 2$, tenemos que

$$a_n = -4 - \frac{4}{3} - \dots - \frac{4}{3^{n-2}}. \tag{1}$$

Entonces

$$a_n - a_{n-1} = -\frac{4}{3^{n-2}} < 0,$$

esto es la sucesión es (estrictamente) decreciente. Además, usando (1), podemos escribir a_n como la *suma geométrica*

$$a_n = -4 \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{3}\right)^k = -4 \, \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{3}} = -6 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} , \tag{2}$$

donde hemos usado un resultado conocido. De (2) deducimos que $|a_n| \leq 6$ para todo $n \geq 2$, esto es la sucesión es acotada, y que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -6 \, .$$

Problema 2. Encuentra *todos* los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha-2)^n}{n^2+1}$$

es convergente.

SOLUCIÓN

Dado $a_n = (\alpha-2)^n/(n^2+1)$, se observe que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(\alpha-2)^{n+1}}{(n+1)^2+1}\,\frac{n^2+1}{(\alpha-2)^n}\right| = |\alpha-2|\,\frac{n^2+1}{n^2+2n+2} \longrightarrow |\alpha-2| \quad \text{si} \;\; n\to\infty\,,$$

por tanto, gracias al *criterio del cociente*, la serie es convergente si $|\alpha-2| < 1$, esto es si $1 < \alpha < 3$ (si $\alpha > 3$ o $\alpha < 1$ la serie diverge). Si $\alpha = 3$ la serie resulta ser

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}\,,$$

que es convergente porque $1/(n^2+1) < 1/n^2$ para todo $n \geq 1$ y la serie con término general $1/n^2$ es convergente (*criterio de comparación*). Por otra parte, si $\alpha = 1$ la serie resulta ser

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}\,,$$

que es convergente gracias al *criterio de Leibniz* (es una serie alternada, donde el término $1/(n^2+1)$ es positivo, decreciente y tiende a cero cuando $n\to\infty$).

Problema 3. Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 7\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\,x\right) & \text{si } x > 2\,, \\ a(x+1) + b & \text{si } -1 < x \le 2\,, \\ x^3 - 12x + 5 & \text{si } x \le -1\,, \end{cases}$$

donde a y b son constantes reales.

(a) Encuentra los valores de a y b tales que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

(b) Calcula (si hay) máximos y mínimos locales de $f(x)$ para $x < -1$.

SOLUCIÓN

La función $f(x)$ es continua para $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$ siendo definida en términos de funciones elementales continuas. La continuidad en $x = -1$ se asegura imponiendo que

$$f(-1) = \lim_{x \to -1^-} \left[x^3 - 12x + 5 \right] = \lim_{x \to -1^+} \left[a(x+1) + b \right],$$

que implica $b = 16$. Por otra parte, la continuidad en $x = 2$ se asegura imponiendo que

$$f(2) = \lim_{x \to 2^-} \left[a(x+1) + b \right] = \lim_{x \to 2^+} \left[-x^2 - 7\cos\left(\frac{\pi}{2}\,x\right) \right],$$

que implica $3a + b = 3$, esto es $a = -13/3$. Los valores calculados para a y b hacen que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$. Ahora, el único *punto crítico* para $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, -1)$ se obtiene imponiendo que

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = -2,$$

que es un punto de máximo local (siendo $f''(-2) = -12 < 0$) donde $f(-2) = 21$. La función $f(x)$ no tiene ningún mínimo local para $x < -1$.

Problema 4. Aproxima el valor

$$\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

usando un polinomio de grado 3 y estima el error involucrado (calcula una cota superior apropiada).

SOLUCIÓN

Se observe que

$$\ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{3}\right)$$

se puede obtener evaluando la función $f(x) = \ln(1+x)$ en $x = 1/3$. Dicha función se puede expresar gracias al Teorema de Taylor como

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + R_3(x)\,,$$

donde el resto $R_3(x)$ se puede escribir

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}\,x^4\,,$$

con $f^{(4)}(x) = -6\,(1+x)^{-4}$ y $c \in (0,x)$ si $x > 0$. Entonces, podemos aproximar el valor deseado con

$$\ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{18} + \frac{1}{81} = \frac{47}{162} \approx 0{,}2901$$

y estimar el error involucrado de la siguiente forma

$$\left|R_3\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \left|\frac{-6}{(1+c)^4}\,\frac{(1/3)^4}{4!}\right| = \frac{(1/3)^4}{4(1+c)^4} \leq \frac{(1/3)^4}{4} \approx 0{,}003\,,$$

donde la desigualdad se cumple porque $c \in (0,1/3)$, pues $c+1 \in (1,4/3)$ y por tanto $(1+c)^{-4} < 1$.