uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

CÁLCULO – AUTOEVALUACIÓN 10

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Problema 1. Considera la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales definida por

$$a_1 = 1\,; \quad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n} \quad \text{con } n = 1, 2, \ldots\,.$$

(a) Demuestra que la sucesión es creciente y acotada superiormente por 3.

(b) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

SOLUCIÓN

(a) Demostremos que la sucesión es creciente, esto es $a_{n+1} > a_n$ para todo $n = 1, 2, \ldots,$ por *inducción*. Primero, $a_2 = 2 > a_1 = 1$. Ahora, suponiendo que $a_{k+1} > a_k$ (para $n = k \in \mathbb{N}$), tenemos que $-1/a_{k+1} > -1/a_k$. Entonces, se obtiene que ($n = k + 1$)

$$a_{k+2} = 3 - \frac{1}{a_{k+1}} > 3 - \frac{1}{a_k} = a_{k+1}\,.$$

También por *inducción*, demostremos que $a_n < 3$ para todo $n = 1, 2, \ldots$. Primero, $a_1 = 1 < 3$. Además, suponiendo que $a_k < 3$ (para $n = k \in \mathbb{N}$), tenemos que $-1/a_k < -1/3$. Entonces, podemos escribir ($n = k + 1$)

$$a_{k+1} = 3 - \frac{1}{a_k} < 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} < 3\,.$$

(b) Sea $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ (dicho límite existe porque la sucesión es creciente y acotada superiormente). Entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{1}{a_n}\right) \implies L = 3 - \frac{1}{L} \implies L = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Dado el comportamiento de la sucesión, el valor deseado es $L = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Problema 2. Estudia la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\,\ln(n^2)}{(n+1)!}$.

SOLUCIÓN

Sea a_n el término general de la serie. Entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{3\,\ln((n+1)^2)}{(n+2)!}\,\frac{(n+1)!}{3\,\ln(n^2)}\right| = \frac{\ln(n+1)}{(n+2)\ln(n)} \;\longrightarrow\; 0\,,$$

cuando $n \to \infty$. Gracias al *criterio del cociente*, la serie converge.

Problema 3. Sea $f(x) = \text{sen}(x)$.

(a) Usando un polinomio de Taylor de grado 2 en $a = \pi/2$, aproxima $\text{sen}(\pi/2 + 0{,}1)$ y estima el error cometido.

(b) Aplica el cambio de variable $s = x - \pi/2$ en el polinomio de Taylor usado en (a) pero de grado genérico $n \in \mathbb{N}$. ¿Reconoces el polinomio de Taylor obtenido?

SOLUCIÓN

(a) Podemos escribir

$$\text{sen}(x) \;=\; 1 - \frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{2} + R_2(x)\,,$$

que nos da la aproximación

$$\text{sen}(\pi/2 + 0{,}1) \;\approx\; 1 - \frac{(0{,}1)^2}{2} \;=\; 0{,}995\,.$$

Además, el error cometido se puede estimar de la forma siguiente

$$|R_2(\pi/2 + 0{,}1)| \;\leq\; \frac{(0{,}1)^4}{24} \;\approx\; 4 \times 10^{-6}\,.$$

(b) Con el cambio de variable indicado obtenemos que

$$\text{sen}(s + \pi/2) \;\approx\; 1 - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{s^{2n}}{(2n)!}\,,$$

siendo el lado derecho el polinomio de Taylor de grado $n \in \mathbb{N}$ en $a = 0$ asociado a $\cos(s)$.

Problema 4. Calcula el número *exacto* de soluciones reales de la ecuación

$$\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + \alpha \,=\, 0$$

en función del valor del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN

Sea $f_\alpha(x) = \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + \alpha$, continua y derivable en $\mathbb{R}$. Su derivada es

$$f'_\alpha(x) \,=\, \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{2}\frac{2x}{1 + x^2} \,=\, \frac{1 - x}{1 + x^2}\,.$$

Pues, independientemente de α, f_α es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ (derivada positiva) y decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$ (derivada negativa). Además

- $\displaystyle \lim_{x\to\pm\infty} f_\alpha(x) \,=\, -\infty\,;$
- $\displaystyle f_\alpha(1) \,=\, \arctan(1) - \frac{\ln(2)}{2} + \alpha \,=\, \alpha + \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}\,.$

Entonces, el número de soluciones reales de la ecuación $f_\alpha(x) = 0$ depende del valor $f_\alpha(1)$. En particular, si $\alpha > \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\pi}{4}$ ($f_\alpha(1) > 0$) existen dos soluciones, si $\alpha < \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\pi}{4}$ ($f_\alpha(1) < 0$) no existen soluciones, si $\alpha = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\pi}{4}$ ($f_\alpha(1) = 0$) existe una única solución.