CÁLCULO – AUTOEVALUACIÓN 11

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Problema 1. Paradoja de Aquiles y la tortuga

Aquiles y una tortuga deciden competir en una carrera. Confiado en su superioridad, Aquiles le da ventaja a la tortuga, pero cuando llega a la posición desde donde salió la tortuga, ésta ha avanzado un poco. Entonces Aquiles sigue corriendo hasta ese punto, pero al llegar ve que la tortuga ha avanzado otro poco.

Repitiendo este razonamiento infinitas veces, parece que Aquiles nunca puede alcanzar a la tortuga. Sin embargo, Aquiles alcanza a la tortuga si el tiempo empleado en los infinitos pasos es un valor finito.

Supongamos que la tortuga sale una distancia L por delante, que la velocidad de Aquiles es v_A y que la velocidad de la tortuga es v_T (con $L, v_A, v_T \in \mathbb{R}$). Pues el tiempo total t transcurrido en los infinitos pasos es

$$t = \frac{L}{v_A}\left(1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots\right), \quad \text{con } r = \frac{v_T}{v_A}.$$

- ¿Qué tipo de serie es?
- Discute su convergencia en función de v_A y v_T.
- En el caso en que Aquiles alcanza a la tortuga, calcula el tiempo t que tarda en hacerlo.

SOLUCIÓN

Es una serie geométrica que converge si $r = \frac{v_T}{v_A} < 1$, esto es si Aquiles corre más rápido que la tortuga. En este caso, el tiempo que tarda Aquiles en alcanzar a la tortuga es

$$t \,=\, \frac{L}{v_A}\,\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^n \,=\, \frac{L}{v_A - v_T}\,.$$

Notése que esto encaja con la solución del problema planteado con la ecuación

$$L + v_T t \,=\, v_A t\,.$$

Problema 2. Demuestra que la función

$$f(x) \;=\; \begin{cases} (x^3 - 3x + 1)\,\ln(1 + x^2) & \text{si } \; -1 \leq x \leq 0\,, \\[2ex] e^{-1/x^2} - \arctan(3^x - 1) & \text{si } \; 0 < x \leq 1\,, \end{cases}$$

es acotada en su dominio.

SOLUCIÓN

Siendo el dominio de $f(x)$ el intervalo de definición $[-1, 1]$, que es cerrado y acotado, podemos demostrar que $f(x)$ es continua en $[-1, 1]$. Para $x \neq 0$, $f(x)$ es continua pues está definida mediante funciones elementales continuas. Por otro lado, la continuidad en $x = 0$ sigue de

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \;=\; \lim_{x \to 0^+} f(x) \;=\; f(0) \;=\; 0\,.$$

Problema 3. Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen}(x)} \frac{1-\operatorname{arc\,sen}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$, con $x \in (0,\pi/2)$.

(a) Calcula y clasifica los extremos *locales* de $F(x)$.

(b) Usando un polinomio de Taylor de grado 2 para $F(x)$, calcula $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)-x}{7x^2}$.

SOLUCIÓN

(a) Gracias al Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que $F'(x) = 1-x$. Por tanto, el único punto crítico es $x = 1$, que es un máximo local.

(b) El polinomio de Taylor de grado 2, centrado en $a = 0$, para $F(x)$ es $P_2(x) = x - x^2/2$. Pues podemos escribir

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)-x}{7x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left[\, x - x^2/2 + o(x^2)\,\right] - x}{7x^2} = -\frac{1}{14}.$$

Problema 4. Calcula $\displaystyle\int \frac{3e^{2x}+7e^{x}}{e^{2x}+4e^{x}+5}\,dx\,,$ usando el cambio de variable $u = e^{x}$.

SOLUCIÓN

Aplicando el cambio de variable $u = e^{x}$ ($du = e^{x}dx$) obtenemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{3u+7}{u^2+4u+5}\,du \;&=\; \frac{3}{2}\int \frac{2u+4}{u^2+4u+5}\,du \;+\; \int \frac{1}{u^2+4u+5}\,du \\ &= \frac{3}{2}\ln|u^2+4u+5| \;+\; \arctan(u+2)+k\,,\end{aligned}$$

donde $k \in \mathbb{R}$. Por tanto

$$\int \frac{3e^{2x}+7e^{x}}{e^{2x}+4e^{x}+5}\,dx \;=\; \frac{3}{2}\ln|e^{2x}+4e^{x}+5| \;+\; \arctan(e^{x}+2)+k\,.$$

Problema 5. Estudia la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}\,dx$.

SOLUCIÓN

La integral impropia converge pues, por ejemplo, podemos escribir

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{1} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}\,dx\,,$$

donde la primera integral de la derecha converge por el *criterio de comparación* con $\int_0^1 1/\sqrt{x}\,dx$ y la segunda converge por el *criterio de comparación al límite* con $\int_1^{\infty} 1/x^2\,dx$.