CÁLCULO – AUTOEVALUACIÓN 12

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Problema 1. Considera la sucesión monótona *creciente* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por la siguiente fórmula de recurrencia

$$a_0 = 1\,,$$
$$a_n = \sqrt{\frac{2+3a_{n-1}}{2}}\,, \quad \text{con } n \geq 1\,.$$

(a) Demuestra que la sucesión es acotada.

(b) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

SOLUCIÓN

Supongamos que la sucesión tiene límite finito, esto es $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Pues, cuando $n \to \infty$ en ambos lados de la fórmula de recurrencia, tenemos que

$$a = \sqrt{\frac{2+3a}{2}} \quad \Longrightarrow \quad a^2 = \frac{3}{2}\,a + 1 \quad \Longrightarrow \quad a = -\frac{1}{2},\, 2\,,$$

donde el valor $a = -1/2$ debemos descartarlo porque la sucesión es creciente y tiene términos positivos. Entonces, $a = 2$ es el único *candidato* a ser el valor del límite.

Demostremos por el *método de inducción* que la sucesión es acotada, esto es $0 \leq a_n \leq 2$ para todo $n \geq 0$. Primero, dicha propiedad vale para $n = 0$, pues $0 \leq a_0 = 1 \leq 2$. Luego, suponiendo que $0 \leq a_k \leq 2$ para $n = k \geq 0$, obtenemos que $(n = k+1)$

$$0 \leq a_{k+1} = \sqrt{\frac{2+3a_k}{2}} \leq \sqrt{\frac{2+6}{2}} = 2\,.$$

Por tanto, la sucesión es acotada y tiene límite finito cuyo valor es $a = 2$, como calculado anteriormente.

Problema 2. Considera la función

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x \neq 0\,, \\ \pi & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

(a) Demuestra que la función $f(x)$ es derivable para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Encuentra para que valores de $x \in \mathbb{R}$ la función $f(x)$ es creciente.

SOLUCIÓN

Para $x \neq 0$, $f(x)$ es derivable siendo composición de funciones derivables y tenemos que

$$f'(x) = \frac{-2x}{x^4+1}\,,$$

mientras que, si $x = 0$, obtenemos que

$$f'(0) \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\pi}{2} - \pi}{x} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{x^4+1} \;=\; 0\,,$$

donde la regla de l'Hôpital se ha aplicado en la penúltima igualdad. Así pues, $f(x)$ es derivable en $x = 0$ también. Además, $f(x)$ es creciente para $x < 0$ porque $f'(x) > 0$ en ese caso.

Problema 3. Sea $F(x) = \int_0^{x^3} \ln\left(t^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\right)\, dt$.

(a) Encuentra y clasifica los extremos *locales* de $F(x)$ para $x \in (0,1)$.

(b) Usa el polinomio de Maclaurin de grado 3 asociado a $F(x)$ para estimar $F(0{,}2)$.

SOLUCIÓN

(a) Gracias al Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que $F'(x) = 3x^2 \ln\left(x + \frac{1}{2}\right)$. Por tanto, el único punto crítico en el intervalo $(0,1)$ es $x = 1/2$. Además, la función $F(x)$ es decreciente para $x < 1/2$ ($F'(x) < 0$) y creciente para $x > 1/2$ ($F'(x) > 0$). Así pues, $x = 1/2$ es un punto de mínimo local.

(b) El polinomio de Maclaurin de grado 3 para $F(x)$ es $P_3(x) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) x^3$, por tanto

$$F(0{,}2) \approx \ln\left(\frac{1}{2}\right) (0{,}2)^3 \approx -0{,}0055\,.$$

Problema 4. Calcula $\displaystyle\int_e^5 \frac{dx}{x\,\ln(x)}$.

SOLUCIÓN

Aplicando el cambio de variable $u = \ln(x)$ ($du = dx/x$) tenemos que

$$\int_e^5 \frac{dx}{x\,\ln(x)} \;=\; \int_1^{\ln(5)} \frac{du}{u} \;=\; \ln(\ln(5)) - 0 \;=\; \ln(\ln(5))\,.$$

Problema 5. Estudia la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x+x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN

La integral converge porque, por ejemplo, podemos escribir

$$\int_0^\infty \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x+x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x+x^2}\,dx\,,$$

donde la primera integral de la derecha no es impropia y la segunda integral converge gracias al *criterio de comparación al límite* con $\int_1^\infty 1/x^{3/2}\,dx$.