uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

CÁLCULO – AUTOEVALUACIÓN 2

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Problema 1. Considera la sucesión monótona creciente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por la siguiente fórmula de recurrencia

$$\begin{aligned} a_1 &= 0\,, \\ a_{n+1} &= \sqrt{4a_n+5}\,, \quad n \geq 1\,. \end{aligned}$$

Demuestra que la sucesión es acotada y calcula $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

SOLUCIÓN

Supongamos que la sucesión tiene límite finito, esto es $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Entonces, cuando $n \to \infty$ en ambos lados de la fórmula de recurrencia, tenemos que

$$a = \sqrt{4a+5} \quad \Longrightarrow \quad a^2 = 4a+5 \quad \Longrightarrow \quad a = -1, 5\,,$$

donde hay que descartar el valor $a = -1$ porque la sucesión es creciente y con términos positivos. Así pues, $a = 5$ es el único *candidato* a ser el valor del límite.

Ahora, demostramos por *inducción* que la sucesión es acotada por arriba por 5, esto es $0 \leq a_n \leq 5$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Primero, dicha propiedad se cumple para $n = 1$, esto es $0 \leq a_1 = 0 \leq 5$. Luego, suponiendo que $0 \leq a_k \leq 5$ para $n = k \in \mathbb{N}$, obtenemos que $(n = k+1)$

$$0 \leq a_{k+1} = \sqrt{4a_k+5} \leq \sqrt{4\cdot 5+5} = 5\,.$$

Por tanto, la sucesión es acotada, pues tiene límite finito gracias a su comportamiento creciente. Como consecuencia, el límite deseado es $a = 5$, como calculado anteriormente.

Problema 2. Encuentra *todos* los valores del parámetro $x \in \mathbb{R}$ tales que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{2k}\, x^{3k}}{(2k+1)\, 5^k}$$

es convergente.

SOLUCIÓN

Sea $a_k = \dfrac{3^{2k}\, x^{3k}}{(2k+1)\, 5^k}$. Entonces, tenemos que

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{9}{5}\, |x|^3\, \frac{2k+1}{2k+3} \quad \longrightarrow \quad \frac{9}{5}\, |x|^3 \quad \text{si} \;\; k \to \infty\,.$$

Así pues, gracias al *criterio del cociente*, la serie converge si

$$\frac{9}{5}\, |x|^3 < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |x|^3 < \frac{5}{9} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \left(-\frac{5^{1/3}}{9^{1/3}}\,,\; \frac{5^{1/3}}{9^{1/3}} \right)\,,$$

mientras que diverge si

$$\frac{9}{5}\, |x|^3 > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \left(-\infty\,,\; -\frac{5^{1/3}}{9^{1/3}} \right) \cup \left(\frac{5^{1/3}}{9^{1/3}}\,,\; +\infty \right)\,.$$

Por otra parte, si

$$\frac{9}{5}\, |x|^3 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |x|^3 = \frac{5}{9} \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 = \pm \frac{5}{9}\,,$$

la serie en el caso $x^3 = 5/9$ resulta ser

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\,,$$

que diverge, y en el caso $x^3 = -5/9$ resulta ser

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\,,$$

que converge por el *criterio de Leibniz*. Por tanto, concluimos que la serie dada converge si y solo si

$$x \in \left[-\frac{5^{1/3}}{9^{1/3}}\,,\; \frac{5^{1/3}}{9^{1/3}} \right)\,.$$

Problema 3. Considera la función

$$F(x) = \int_0^{5x} e^{-7t^4}\,dt\,, \quad \text{con } x \in \mathbb{R}\,.$$

- Demuestra que $F(x)$ es una función *impar*.
- Demuestra la existencia del límite $\ell = \lim_{x\to\infty} F(x)\,.$
- Demuestra que la función $F : \mathbb{R} \to (-\ell, \ell)$ es monótona *creciente*.
- Calcula $(F^{-1})'(0)$.
- Calcula $\lim_{x\to 0} \dfrac{5x - F(x)}{x^5}\,.$

SOLUCIÓN

- La función $F(x)$ es *impar* porque

$$F(-x) \;=\; \int_0^{-5x} e^{-7t^4}\,dt \;=\; -\int_0^{5x} e^{-7u^4}\,du \;=\; -F(x)\,,$$

donde la segunda igualdad se obtiene mediante el cambio de variable $u = -t\,.$

- Primero, notése que

$$\ell \;=\; \lim_{x\to\infty} F(x) \;=\; \lim_{x\to\infty} \int_0^{5x} e^{-7t^4}\,dt \;=\; \int_0^{\infty} e^{-7t^4}\,dt$$

es una integral *impropia* de primera especie (de una función positiva). Entonces, tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-7t^4}}{e^{-t}} \;=\; \lim_{t\to\infty} e^{-7t^4+t} \;=\; 0\,.$$

Así pues, ya que $\int_0^\infty e^{-t}\,dt$ converge, por el criterio de comparación al límite podemos concluir que $\int_0^\infty e^{-7t^4}\,dt$ converge también, esto es el límite ℓ deseado existe.

- La función $F(x)$ es *creciente* porque

$$F'(x) \;=\; 5\,e^{-7(5x)^4} \;>\; 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Notése que $F'(x)$ se calcula gracias al Teorema Fundamental del Cálculo (regla de Leibniz).

- Gracias al resultado del punto anterior, $F^{-1}(x)$ existe. Además, tenemos que

$$(F^{-1})'(x) \;=\; \frac{1}{F'\big(F^{-1}(x)\big)} \quad\Longrightarrow\quad (F^{-1})'(0) \;=\; \frac{1}{F'\big(F^{-1}(0)\big)} \;=\; \frac{1}{F'(0)} \;=\; \frac{1}{5}\,,$$

donde la penúltima igualdad se cumple porque $F(0) = 0$, mientras que la última igualdad se obtiene de la expresión para $F'(x)$ calculada en el punto anterior.

- Usando la regla de l'Hôpital dos veces se obtiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x - F(x)}{x^5} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{5 - F'(x)}{5x^4} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{5 - 5\,e^{-7(5x)^4}}{5x^4} \;=\; \lim_{x\to 0} 7\cdot 5^4\, e^{-7(5x)^4} \;=\; 4375\,.$$

Problema 4. Calcula
$$\int \frac{dx}{(x+1)^{4/3}-(x+1)^{2/3}}\,.$$

SOLUCIÓN

Usemos el cambio de variable
$$u = (x+1)^{1/3}; \quad du = \frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}dx \implies dx = 3u^2du\,.$$

Entonces, la integral se transforma en
$$\int \frac{dx}{(x+1)^{4/3}-(x+1)^{2/3}} = 3\int \frac{u^2}{u^4-u^2}du = 3\int \frac{du}{u^2-1}\,.$$

Ahora, podemos escribir
$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{(u-1)(u+1)} = \frac{1/2}{u-1} - \frac{1/2}{u+1}$$

y finalmente
$$\int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u-1} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u+1} = \frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|u+1| + c\,,$$

donde c es una constante arbitraria. Así pues, se obtiene que
$$\int \frac{dx}{(x+1)^{4/3}-(x+1)^{2/3}} = \frac{3}{2}\ln\left|\frac{(x+1)^{1/3}-1}{(x+1)^{1/3}+1}\right| + c\,.$$