uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

CÁLCULO – AUTOEVALUACIÓN 4

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Problema 1. Considera la sucesión *decreciente* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$\begin{aligned} a_1 &= 1\,, \\ a_n &= -8 + \frac{a_{n-1}}{3}\,, \quad \text{con } n \geq 2\,. \end{aligned}$$

- Demuestra que la sucesión es acotada.
- Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

SOLUCIÓN

Supongamos que la sucesión tiene límite finito, esto es $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Entonces, cuando $n \to \infty$ en ambos lados de la fórmula de recurrencia, obtenemos que

$$a = -8 + \frac{a}{3} \quad \Longrightarrow \quad a = -12\,.$$

Por tanto, si la sucesión converge, $a = -12$ tiene que ser el valor de su límite.

Ahora, demostremos por el *método de inducción* que la sucesión es acotada, esto es $-12 \leq a_n \leq 1$ con $n \in \mathbb{N}$. La propiedad se cumple para $n = 1$, esto es $-12 \leq a_1 = 1 \leq 1$. Luego, suponiendo que $-12 \leq a_k \leq 1$ para $n = k \in \mathbb{N}$, se obtiene que $(n = k + 1)$

$$-12 = -8 - \frac{12}{3} \leq a_{k+1} = -8 + \frac{a_k}{3} \leq -8 + \frac{1}{3} \leq 1\,.$$

Entonces, la sucesión es acotada, pues tiene límite finito gracias a su comportamiento decreciente. Como consecuencia, el valor deseado del límite es $a = -12$, como calculado anteriormente.

Problema 2. Encuentra *todos* los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3^k \alpha^{2k}}{k+1}$$

es convergente.

SOLUCIÓN

Sea a_k el término general de la serie. Entonces

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(-1)^{k+1} 3^{k+1} \alpha^{2k+2}}{k+2} \frac{k+1}{(-1)^k 3^k \alpha^{2k}}\right| = 3\alpha^2 \frac{k+1}{k+2} \longrightarrow 3\alpha^2 \quad \text{si } k \to \infty\,.$$

Por tanto, gracias al *criterio del cociente*, la serie converge si $3\alpha^2 < 1$, esto es cuando $-\sqrt{3}/3 < \alpha < \sqrt{3}/3$ (diverge para $\alpha > \sqrt{3}/3$ o $\alpha < -\sqrt{3}/3$). Si $\alpha = \pm\sqrt{3}/3$, la serie resulta ser

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}\,,$$

que es convergente gracias al *criterio de Leibniz* (es una serie alternada, donde $1/(k+1)$ es positivo, decreciente y tiende a cero cuando $k \to \infty$).

Problema 3. Aproxima el valor
$$\sqrt[3]{1.1}$$
usando un polinomio de grado 2. Además, encuentra una cota superior para el error de aproximación involucrado.

SOLUCIÓN

Observamos que
$$\sqrt[3]{1.1} = (1+0.1)^{1/3}$$
se puede calcular evaluando la función $f(x) = (1+x)^{1/3}$ en $x = 0.1$. Dicha función se puede expresar gracias al Teorema de Taylor como

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/3} &= 1 + \frac{1}{3}\,x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}\,x^2 + R_2(x)\\ &= 1 + \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9}\,x^2 + R_2(x)\,,\end{aligned}$$

donde el resto $R_2(x)$ es
$$R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}\,x^3\,,$$
con
$$f'''(c) = \frac{10}{27}\,(1+c)^{-8/3}\,, \quad c \in (0,x) \text{ si } x > 0\,.$$
Así pues, podemos aproximar el valor deseado con

$$\sqrt[3]{1.1} \approx 1 + \frac{0.1}{3} - \frac{(0.1)^2}{9} \approx 1.03222$$

y estimar el error involucrado como

$$|R_2\,(0.1)| = \left|\frac{10}{27\cdot 3!}\,\frac{1}{(1+c)^{8/3}}\,(0.1)^3\right| < \frac{10}{27\cdot 6}\,(0.1)^3 \approx 6\cdot 10^{-5}\,,$$

donde la desigualdad se obtiene recordando que $c \in (0, 0.1)$.

Problema 4. Considera la función

$$f(x) = x^x \,.$$

Encuentra el número de soluciones de la ecuación $f(x) = 2$ en el intervalo $[1, +\infty)$.

SOLUCIÓN

En el intervalo $[1, +\infty)$ la función es continua y derivable, pues se define como

$$f(x) = x^x = e^{x \ln x} \,.$$

Por otra parte, la ecuación dada se puede escribir como

$$f(x) - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F(x) = 0 \,,$$

donde $F(x) = f(x) - 2$ es una función continua y derivable en $[1, +\infty)$ tal que

$$F'(x) = e^{x \ln x} \, (\ln x + 1) > 0 \,.$$

Así pues, $F(x)$ es creciente en $[1, +\infty)$, $F(1) = -1 < 0$ y $\lim_{x \to \infty} F(x) = +\infty$. Por tanto, podemos concluir que la ecuación tiene una única solución en el intervalo indicado.