uc3m | Universidad **Carlos III** de Madrid

CÁLCULO – AUTOEVALUACIÓN 5

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Problema 1. Considera la sucesión monótona $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$a_1 = 0\,; \qquad a_n = \sqrt{a_{n-1}+20}\,, \quad \text{con } n \geq 2.$$

Demuestra que la sucesión es acotada y calcula $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

SOLUCIÓN

Supongamos que la sucesión tiene límite finito, esto es $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Entonces, cuando $n \to \infty$ en ambos lados de la fórmula de recurrencia, obtenemos que

$$a = \sqrt{a+20} \quad \Longrightarrow \quad a^2 = a + 20 \quad \Longrightarrow \quad a = -4, 5\,,$$

donde hay que descartar el valor $a = -4$ porque la sucesión es creciente y con términos positivos. Por tanto, $a = 5$ es el único *candidato* a ser el valor del límite.

Ahora, demostremos por el *método de inducción* que la sucesión es acotada por arriba por 5, esto es $0 \leq a_n \leq 5$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Primero, dicha propiedad se cumple para $n = 1$, esto es $0 \leq a_1 = 0 \leq 5$. Luego, suponiendo que $0 \leq a_k \leq 5$ para $n = k \in \mathbb{N}$, tenemos que ($n = k+1$)

$$0 \leq a_{k+1} = \sqrt{a_k + 20} \leq \sqrt{5+20} = 5\,.$$

Por tanto, la sucesión es acotada, pues tiene límite finito gracias a su comportamiento creciente. Como consecuencia, el valor del límite es $a = 5$, como calculado anteriormente.

Problema 2. Calcula

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}+2x+x\arctan(x)-e^{3x}\big[1-\ln(1+x)\big]}{x\big[\ln(1+5x)+\arctan(2x)\big]}\,.$$

SOLUCIÓN

En el límite dado tenemos $x \to 0$, por tanto podemos sustituir todas las funciones elementales involucradas con unos pocos términos de sus polinomios de Maclaurin, esto es

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)+2x+x\big[\,x+o(x)\,\big]-\big[\,1+3x+\frac{9}{2}x^2+o(x^2)\,\big]\,\big[\,1-x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\,\big]}{x\big[\,5x+o(x)+2x+o(x)\,\big]}\,.$$

Finalmente, simplificando la expresión anterior y reteniendo los términos con potencias de x hasta 2, se obtiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{7x^2+o(x^2)} = -\frac{1}{14}\,.$$

Problema 3. Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) \;=\; \int_0^x e^{1-\sqrt{1+t^2}}\,dt\,.$$

- Demuestra que $f(x)$ es *impar*.
- Demuestra que $f(x)$ es *creciente*.
- Calcula el polinomio de Taylor de grado 3, centrado en $x_0 = 0$, para $f(x)$.
- Estudia la convergencia de la *integral impropia*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \;=\; \int_0^{\infty} e^{1-\sqrt{1+t^2}}\,dt\,.$$

SOLUCIÓN

- La función $f(x)$ es *impar* porque

$$f(-x) \;=\; \int_0^{-x} e^{1-\sqrt{1+t^2}}\,dt \;=\; -\int_0^{x} e^{1-\sqrt{1+u^2}}\,du \;=\; -f(x)\,,$$

donde la segunda igualdad se obtiene gracias al cambio de variable $u = -t$.

- La función $f(x)$ es *creciente* porque

$$f'(x) \;=\; e^{1-\sqrt{1+x^2}} \;>\; 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Notése que la derivada $f'(x)$ se deduce gracias al Teorema Fundamental del Cálculo.

- El polinomio de Taylor deseado es

$$P_3(x) \;=\; f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3\,.$$

Además, tenemos que $f(0) = 0$ (por una propiedad de las integrales) y $f'(0) = 1$ (usando el resultado del punto anterior). Después de calcular la segunda y la tercera derivada de $f(x)$, se obtiene que $f''(0) = 0$ y $f'''(0) = -1$. Así pues, podemos finalmente escribir

$$P_3(x) \;=\; x - \frac{1}{6}x^3\,.$$

- Tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{1-\sqrt{1+t^2}}}{e^{-t}} = e > 0\,.$$

Por tanto, siendo $\int_0^\infty e^{-t}\,dt$ convergente, por el *criterio de comparación al límite* podemos concluir que $\int_0^\infty e^{1-\sqrt{1+t^2}}\,dt$ converge.

Problema 4. Calcula

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x^{1/3})}{x^{1/3}}\, dx$$

en términos de funciones elementales.

SOLUCIÓN

Se considere el cambio de variable

$$u = x^{1/3}; \quad du = \frac{1}{3}x^{-2/3}dx \implies dx = 3u^2 du\,.$$

Entonces, la integral se puede escribir como

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x^{1/3})}{x^{1/3}}\, dx = 3\int u \operatorname{sen}(u)\, du = -3u\cos(u) + 3\operatorname{sen}(u) + k\,,$$

donde k es una constante arbitraria y la última igualdad se obtiene integrando por partes. Finalmente, deshaciendo el cambio de variable, tenemos que

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x^{1/3})}{x^{1/3}}\, dx = -3x^{1/3}\cos(x^{1/3}) + 3\operatorname{sen}(x^{1/3}) + k\,.$$