uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

CÁLCULO – AUTOEVALUACIÓN 6

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Problema 1. Considera la sucesión definida por el término general

$$a_n = \frac{n + \operatorname{sen}(\pi n/2)}{3n+5}, \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

¿Es acotada? ¿Es monótona? ¿Es convergente?

SOLUCIÓN

Primero, observamos que

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{11}, \frac{1}{7}, \frac{4}{17}, \ldots\right),$$

con $a_1 = \frac{1}{4} > a_2 = \frac{2}{11} > a_3 = \frac{1}{7} < a_4 = \frac{4}{17}$. Por tanto, la sucesión no es monótona.

Además, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos escribir

$$0 \le \frac{n-1}{3n+5} \le \frac{n + \operatorname{sen}(\pi n/2)}{3n+5} \le \frac{n+1}{3n+5} \le 1,$$

lo que implica que la sucesión es acotada. Finalmente, por las desigualdades anteriores y el *criterio del sándwich*, podemos concluir que la sucesión es convergente, con $a_n \to 1/3$ cuando $n \to \infty$.

Problema 2. Estudia la convergencia de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^2+5}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}.$$

SOLUCIÓN

Sea a_n el término general de la primera serie. Entonces, considerando $b_n = 1/n^2$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(n)}{n^2+5}\, n^2 = \frac{\pi}{2} > 0.$$

Por tanto, por el *criterio de comparación al límite*, la primera serie es convergente porque $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ lo es (ambas series tienen términos positivos).

Considerando la segunda serie, para todo $n \geq 3$, podemos escribir

$$\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n} > 0.$$

Por tanto, por el *criterio de comparación*, la segunda serie es divergente porque $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ lo es.

Problema 3. ¿Cuántas soluciones *reales* tiene la ecuación $\cos(x) = x$?

SOLUCIÓN

Consideremos la función $f(x) = x - \cos(x)$, que es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Además, tenemos que $f'(x) = 1 + \operatorname{sen}(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (esto es $f(x)$ es creciente) y por otra parte

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\,.$$

Como consecuencia, $f(x)$ cruza el eje x en un solo punto, esto es la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución real.

Problema 4. Calcula el ángulo formado por las rectas tangentes por la derecha y por la izquierda, en $x_0 = 0$, a la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}, & \text{si } x < 0, \\ xe^x + 1, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

SOLUCIÓN

La pendiente de la recta tangente por la derecha, en $x_0 = 0$, es

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} e^x = 1.$$

Por otro lado, la pendiente de la recta tangente por la izquierda, en $x_0 = 0$, es

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2} = 0.$$

Así pues, el ángulo deseado es $\pi/4$.

Problema 5. Encuentra la familia de polinomios $P(x)$ tales que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^4} - P(x)}{x^7} = 0\,.$$

SOLUCIÓN

Usando el Teorema de Taylor, podemos escribir $\sqrt{1-z} = 1 - z/2 - z^2/8 + o(z^2)$, por tanto

$$\sqrt{1-x^4} = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^7)\,.$$

Luego, si necesitamos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^4} - P(x)}{x^7} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^4}{2} + o(x^7) - P(x)}{x^7} = 0\,,$$

podemos elegir $P(x)$ en la familia de polinomios de la forma

$$P(x) = 1 - \frac{x^4}{2} + a_8 x^8 + a_9 x^9 + \ldots + a_n x^n\,,$$

donde $a_8, \ldots, a_n$ ($n \in \mathbb{N}$) son coeficientes reales (algunos o todos posiblemente nulos).

Problema 6. Calcula
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_0^x t^2\cos(t^2)\,dt\,.$$

SOLUCIÓN

Usando el Teorema de Taylor, podemos escribir
$$t^2\cos(t^2) \;=\; t^2\left(1-\frac{t^4}{2}+\frac{t^8}{24}+o(t^8)\right) \;=\; t^2-\frac{t^6}{2}+\frac{t^{10}}{24}+o(t^{10})\,.$$
Por tanto
$$\int_0^x t^2\cos(t^2)\,dt \;=\; \int_0^x \left(t^2-\frac{t^6}{2}+\frac{t^{10}}{24}+o(t^{10})\right)dt \;=\; \frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{14}+o(x^7)\,.$$
Finalmente, podemos calcular el límite deseado como
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_0^x t^2\cos(t^2)\,dt \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{14}+o(x^7)}{x^3} \;=\; \frac{1}{3}\,.$$

Problema 7. Estudia la convergencia de la integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

SOLUCIÓN

Podemos escribir

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx \;=\; \int_0^1 e^{-x}\,x^{-1/2}\,dx \;+\; \int_1^\infty e^{-x}\,x^{-1/2}\,dx\,. \tag{1}$$

Respecto a la primera integral en el lado derecho de (1), tenemos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}\,x^{-1/2}}{x^{-1/2}} \;=\; 1\,.$$

Por tanto, por el *criterio de comparación al límite*, la integral converge porque $\int_0^1 x^{-1/2}\,dx$ es convergente (todas las funciones involucradas son positivas para $x \in (0,1]$). Respecto a la segunda integral en el lado derecho de (1), tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}\,x^{-1/2}}{e^{-x}} \;=\; 0\,.$$

Por tanto, por el *criterio de comparación al límite*, la integral converge porque $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ es convergente (todas las funciones involucradas son positivas para $x \geq 1$). Finalmente, la integral impropia propuesta converge siendo la suma de dos integrales convergentes.