uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

CÁLCULO – AUTOEVALUACIÓN 7

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Problema 1. Considera la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales donde

$$a_n = \sqrt{n}\,\frac{2\cos\left(\pi(n+1)/2\right)}{1+n}, \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

(a) Estudia si la sucesión es monótona y acotada.

(b) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

SOLUCIÓN

(a) Observése que $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = \sqrt{3}/2$, $a_4 = 0$. Por tanto, la sucesión no es monótona. Por otra parte, podemos escribir

$$|a_n| \le \frac{2\sqrt{n}}{1+n} \le \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} \le 2$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es la sucesión es acotada.

(b) El límite deseado se puede calcular como

$$\lim_{n\to\infty} 2\cos\left(\pi(n+1)/2\right)\frac{\sqrt{n}}{1+n} = 0\,,$$

siendo el producto de un término acotado y $\sqrt{n}/(1+n)$ que tiende a cero si $n \to \infty$.

Problema 2. Encuentra *todos* los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\alpha)^{3n}}{7^n \sqrt[3]{n^2+n}}$$

es convergente.

SOLUCIÓN

Sea a_n el término general de la serie. Entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}(2\alpha)^{3n+3}}{7^{n+1}\sqrt[3]{(n+1)^2+n+1}} \frac{7^n \sqrt[3]{n^2+n}}{(-1)^n (2\alpha)^{3n}}\right| = \frac{8}{7}|\alpha|^3 \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{\sqrt[3]{n^2+3n+2}} \longrightarrow \frac{8}{7}|\alpha|^3$$

cuando $n \to \infty$. Por tanto, gracias al *criterio del cociente*, la serie converge si $8|\alpha|^3/7 < 1$, esto es $|\alpha| < \sqrt[3]{7}/2$. Por otra parte, la serie es divergente si $8|\alpha|^3/7 > 1$, esto es $|\alpha| > \sqrt[3]{7}/2$. Para $\alpha = \sqrt[3]{7}/2$ la serie resulta ser

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+n}},$$

que es convergente gracias al *criterio de Leibniz* (es una serie alternada, donde $1/\sqrt[3]{n^2+n}$ es positivo, decreciente y tiende a cero cuando $n \to \infty$). Para $\alpha = -\sqrt[3]{7}/2$ la serie resulta ser

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+n}},$$

que es divergente por el *criterio de comparación al límite* con la serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{2/3}$. Finalmente, podemos concluir que la serie es convergente para $-\sqrt[3]{7}/2 < \alpha \leq \sqrt[3]{7}/2$.

Problema 3. Aproxima el valor

$$\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

usando un polinomio de grado adecuado tal que el error de aproximación involucrado sea menor que 10^{-2}.

SOLUCIÓN

Notése que

$$\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

puede calcularse evaluando la función $f(x) = \ln(1+x)$ en $x = 1/2$. Dicha función se puede expresar mediante el Teorema de Taylor como

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)\,,$$

donde el resto $R_n(x)$ es

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{1}{(n+1)(1+c)^{n+1}}\, x^{n+1}\,,$$

con $c \in (0,x)$ si $x > 0$. Por tanto, en $x = 1/2$, podemos estimar el error de aproximación como

$$\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)(1+c)^{n+1}} < \frac{1}{2^{n+1}\,(n+1)}\,,$$

donde la desigualdad se obtiene observando que $c \in (0, 1/2)$. Finalmente, después de imponer que

$$\frac{1}{2^{n+1}\,(n+1)} < 10^{-2},$$

deducimos que el grado del polinomio de Maclaurin usado tiene que ser por lo menos $n = 4$. Usando dicho valor, la aproximación deseada es

$$\ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0.5 - \frac{(0.5)^2}{2} + \frac{(0.5)^3}{3} - \frac{(0.5)^4}{4}\,,$$

con un error menor que 10^{-2}.

Problema 4. Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}\,\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{si } 0 < x \le 1, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{\cos(x)-1}{x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(a) Estudia si $f(x)$ es continua en $x = 0$.

(b) Encuentra el número de soluciones reales de la ecuación $f(x) = -1$ en el intervalo $(0, 1/2]$.

SOLUCIÓN

(a) Tenemos que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{1-x}\,\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0.$$

Siendo los limites laterales distintos, $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe y por tanto la función $f(x)$ no es continua en $x = 0$.

(b) Para $x \in (0, 1/2]$, la ecuación dada se puede escribir

$$F(x) \equiv f(x) + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \sqrt{1-x}\,\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + 1 = 0.$$

Observando que $F(x)$ es continua y derivable en el intervalo considerado (porque $f(x)$ lo es), podemos calcular su derivada como

$$F'(x) = -\left[\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{2\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{x^2+1}\right].$$

Por tanto, $F'(x) < 0$ y $F(x)$ es decreciente en $(0, 1/2]$, con $\lim_{x\to 0^+} F(x) = \pi/2 + 1 > 0$ (veáse el punto anterior) y $F(1/2) = \arctan(2)/\sqrt{2} + 1 > 0$. Como consecuencia, la ecuación $f(x) = -1$ no tiene soluciones reales en el intervalo indicado.