CÁLCULO – AUTOEVALUACIÓN 8

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Problema 1. Resuelve las siguientes cuestiones.

(a) Considera la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$a_1 = \frac{1}{2}\,; \qquad a_{n+1} = (a_n)^2 + \frac{4}{25}\,, \qquad \text{con } n \geq 1\,.$$

Demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe y calcula su valor.

(b) Estudia la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n^4)}{\sqrt{n^4+1}}$.

SOLUCIÓN

(a) Apliquemos el *método de inducción* para demostrar que la sucesión es acotada por abajo para todo $n \in \mathbb{N}$. Primero, tenemos que $a_1 = 1/2 > 1/5$. Luego, suponiendo que $a_k > 1/5$ para $n = k \in \mathbb{N}$, tenemos que $(n = k+1)$

$$a_{k+1} = (a_k)^2 + \frac{4}{25} > \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{25} = \frac{1}{5}\,.$$

Por otra parte, con la misma técnica, demostremos que la sucesión es decreciente para todo $n \in \mathbb{N}$. Primero, vemos que $a_1 = 1/2 > a_2 = 41/100$. Luego, suponiendo que $a_k > a_{k+1}$ para $n = k \in \mathbb{N}$, tenemos que $(n = k+1)$

$$a_{k+1} = (a_k)^2 + \frac{4}{25} > (a_{k+1})^2 + \frac{4}{25} = a_{k+2}\,.$$

Por tanto, la sucesión es acotada por abajo y decreciente, pues convergente. Ahora, sea $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Entonces, si $n \to \infty$ en ambos lados de la fórmula de recurrencia, tenemos que $L = L^2 + 4/25$, esto es $L = 1/5$ o $L = 4/5$. Siendo la sucesión decreciente y $a_1 = 1/2$, el valor del límite tiene que ser $L = 1/5$.

(b) La serie converge por el *criterio de comparación al límite* con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Problema 2. Considera

$$f(x) \;=\; \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} + \beta\, x\,, & \text{si } \; x < 0\,, \\[2ex] \beta\,\text{sen}(x) - \dfrac{1}{2}\,\text{sen}^2(x)\,, & \text{si } \; x \geq 0\,, \end{cases}$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

(a) Encuentra para que valores de β la función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$.

(b) Encuentra, si existe, el valor de β tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x_0 = 0$ es paralela a la recta $y \,=\, 3x - 7$.

SOLUCIÓN

(a) Si $x \neq 0$, $f(x)$ es una composición de funciones elementales derivables, por tanto es derivable independientemente del valor de β. Además, $f(x)$ es derivable en $x = 0$ también, para todo $\beta \in \mathbb{R}$, porque

$$f'(0^+) \;=\; \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \;=\; \lim_{x \to 0^+} \frac{\beta\,\text{sen}(x) - \frac{1}{2}\,\text{sen}^2(x)}{x} \;=\; \beta\,,$$

$$f'(0^-) \;=\; \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \;=\; \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} + \beta\, x}{x} \;=\; \beta\,.$$

(b) Siendo $f'(0) = \beta$ (veáse el punto anterior), el valor deseado es $\beta = 3$.

Problema 3. Aproxima el valor $\sqrt[3]{1010}$ mediante el polinomio de Taylor de grado 3 para la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $a = 1000$. Luego, estima el error de aproximación involucrado.

SOLUCIÓN

Gracias al Teorema de Taylor, podemos escribir ($x = 1010$)

$$\sqrt[3]{1010} \approx 10 + \frac{1}{3 \cdot 10^2}(1010 - 1000) - \frac{2}{2 \cdot 9 \cdot 10^5}(1010 - 1000)^2 + \frac{10}{6 \cdot 27 \cdot 10^8}(1010 - 1000)^3 .$$

Por otra parte, el error de aproximación involucrado se puede estimar como

$$|R_3(1010)| = \left| \frac{80}{4! \cdot 81\, c^{11/3}}(1010 - 1000)^4 \right| \leq \frac{80}{4! \cdot 81}\, 10^{-7} ,$$

donde la desigualdad se obtiene observando que $1000 < c < 1010$.

Problema 4. Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^{e^{-x}} \frac{1}{\ln(t)}\, dt$.

(a) Encuentra, si existen, máximo y mínimo globales de $F(x)$ en el intervalo $x \in [1, 2]$.

(b) Calcula $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,F(x)$.

SOLUCIÓN

(a) Gracias al Teorema Fundamental del Cálculo (*regla de Leibniz*), podemos escribir $F'(x) = e^{-x}/x > 0$ para todo $x \in [1, 2]$, por tanto $F(x)$ es estrictamente creciente en ese intervalo. Entonces, máximo y mínimo globales de $F(x)$ se hallan en $x = 2$ y $x = 1$, respectivamente.

(b) Tenemos que

$$\lim_{x\to+\infty} x\,F(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{e^x} = 0,$$

donde hemos usado la regla de l'Hôpital en la segunda igualdad.

Problema 5. Calcula las siguientes integrales indefinidas.

(a) $\displaystyle\int x^2\, e^{-3x}\, dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - x + 1}\, dx$

SOLUCIÓN

(a) $\displaystyle\int x^2\, e^{-3x}\, dx \,=\, [\text{por partes}] \,=\, -\frac{1}{3}e^{-3x}\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\right) + c \quad (\text{con } c \in \mathbb{R})\,.$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - x + 1}\, dx \,=\, [\text{racional}] \,=\, \frac{1}{2}\ln|x^2 - x + 1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c \quad (\text{con}$ $c \in \mathbb{R})\,.$

Problema 6. Considera la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty (x+1)^p\, e^{-x^2} dx$.

(a) Estudia su convergencia para $p = 2$.

(b) Sabiendo que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calcula su valor para $p = 1$.

SOLUCIÓN

(a) La integral es convergente por el *criterio de comparación al límite* con $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} dx$.

(b) Usando la definición de integral impropia, podemos escribir

$$\int_0^\infty (x+1)\, e^{-x^2} dx \;=\; \lim_{b\to\infty} \int_0^b (x+1)\, e^{-x^2} dx \;=\; \lim_{b\to\infty} \int_0^b x\, e^{-x^2} dx \;+\; \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left[1 - e^{-b^2}\right] + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \;=\; \frac{\sqrt{\pi}+1}{2} \,.$$