uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

CÁLCULO – AUTOEVALUACIÓN 9

Filippo Terragni & Manuel Carretero Cerrajero

Problema 1. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $x_{n+1} = \sqrt{2x_n+3}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, con $x_1 = 1$. Demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existe y calcula su valor.

SOLUCIÓN

Demostremos por *inducción* que la sucesión es creciente. Cuando $n = 1$ tenemos que $x_2 = \sqrt{5} \geq 1 = x_1$. Luego, suponiendo que $x_{k-1} \leq x_k$ para $n = k \in \mathbb{N}$ ($k \geq 2$), tenemos que

$$2x_{k-1} \leq 2x_k \implies 2x_{k-1}+3 \leq 2x_k+3 \implies \sqrt{2x_{k-1}+3} \leq \sqrt{2x_k+3} \implies x_k \leq x_{k+1}\,.$$

Ahora, demostremos por *inducción* que la sucesión es acotada por arriba por 3. Si $n = 1$ tenemos que $x_1 = 1 \leq 3$. Ahora, suponiendo que $x_k \leq 3$ para $n = k \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$2x_k \leq 6 \implies 2x_k+3 \leq 9 \implies \sqrt{2x_k+3} = x_{k+1} \leq \sqrt{9} = 3\,.$$

Por tanto, la sucesión es convergente, esto es $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ existe. Ahora, cuando $n \to \infty$ en ambos lados de la fórmula de recurrencia, obtenemos que $L = \sqrt{2L+3}$, esto es $L = -1$ o $L = 3$. Siendo la sucesión creciente, el valor de su límite es $L = 3$.

Problema 2. Estudia la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3 + n^{-3}}{n^a}$$

dependiendo del valor del parámetro $a \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN

Si $a = 1, 2, 3$, la serie es divergente porque su término general no tiende a cero cuando $n \to \infty$. Si $a \geq 4$, la serie es convergente por el *criterio de Leibniz*.

Problema 3. Considera la función

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 6\sqrt{x} - x\sqrt{x} & \text{si } \; 0 \le x \le 4\,, \\ (x-4)\, e^{16-x^2} \left[2 - \beta \, \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\, x\right) \right] + 4 & \text{si } \; x > 4\,, \end{cases}$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

(a) Encuentra el valor de β tal que $f(x)$ es derivable en $x = 4$.

(b) Encuentra, si existen, máximo y mínimo *globales* de $f(x)$ en el intervalo $[0, 4]$.

SOLUCIÓN

(a) Observése que

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \;=\; \lim_{x \to 4^+} e^{16-x^2} \left[2 - \beta \, \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\, x\right) \right] \;=\; 2 - \beta\,,$$

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \;=\; \lim_{x \to 4^-} \frac{6\sqrt{x} - x\sqrt{x} - 4}{x - 4} \;=\; -\frac{3}{2}\,.$$

Por definición de derivabilidad, los limites laterales tienen que coincidir. Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 4$ si $\beta = 7/2$.

(b) En el intervalo $[0, 4]$, cerrado y acotado, $f(x)$ es continua, por tanto tiene máximo y mínimo *globales*. Su único punto crítico en $(0, 4)$ es $x = 2$, que se calcula imponiendo que

$$f'(x) \;=\; \frac{6 - 3x}{2\sqrt{x}} \;=\; 0\,.$$

Entonces, los extremos globales de $f(x)$ deben buscarse entre los puntos $x = 2$, $x = 0$ y $x = 4$. Observando que $f(2) = 4\sqrt{2}$, $f(0) = 0$ y $f(4) = 4$, podemos concluir que 0 es el mínimo global (que se alcanza en $x = 0$) y $4\sqrt{2}$ es el máximo global (que se alcanza en $x = 2$).

Problema 4. Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \cos(\sqrt{t})\, dt$.

(a) Usando el polinomio de Maclaurin de grado 2 para $F(x)$, calcula una aproximación del valor
$$\int_0^{0{,}01} \cos(\sqrt{t})\, dt .$$

(b) Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x) - x^2}{x^4}$.

SOLUCIÓN

(a) Tenemos que $F(x) \approx P_2(x) = x^2$ y podemos escribir
$$\int_0^{0{,}01} \cos(\sqrt{t})\, dt \;\approx\; P_2(0{,}1) \;=\; 0{,}01 .$$

(b) Tenemos que $F(x) \approx P_4(x) = x^2 - \dfrac{x^4}{4}$. Entonces, se obtiene que
$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x) - x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\left[x^2 - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right] - x^2}{x^4} = -\frac{1}{4} .$$

Problema 5. Calcula las siguientes integrales indefinidas.

(a) $\displaystyle\int e^x \cos(2x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2+2x+2}\,dx$

SOLUCIÓN

(a) Por partes, cíclica: $\displaystyle\int e^x \cos(2x)\,dx = \frac{1}{5}e^x\Big[\cos(2x) + 2\,\mathrm{sen}(2x)\Big] + c \quad (c \in \mathbb{R})\,.$

(b) Racional: $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2+2x+2}\,dx = \ln|x^2+2x+2| - 5\arctan(x+1) + c \quad (c \in \mathbb{R})\,.$

Problema 6. Estudia para que valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ la integral *impropia*

$$\int_0^2 \frac{1}{x^k}(1-x)^{k-1}dx$$

es convergente.

SOLUCIÓN

Sea $f(x)$ el integrando y $\lambda \in (0,1)$. La integral propuesta puede escribirse como

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_{0^+}^{\lambda} f(x)\,dx + \int_{\lambda}^{1^-} f(x)\,dx + \int_{1^+}^{2} f(x)\,dx\,.$$

Pues, aplicando en modo oportuno el *criterio de comparación al límite*, se puede demostrar que $\int_{0^+}^{\lambda} f(x)\,dx$ converge si $k < 1$, mientras que $\int_{\lambda}^{1^-} f(x)\,dx$ y $\int_{1^+}^{2} f(x)\,dx$ convergen si $k > 0$. Por tanto, la integral propuesta converge para $k \in (0,1)$.