Sistemas eléctricos centralizados.

Julio Usaola
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad Carlos III de Madrid
e-mail: jusaola@ing.uc3m.es

Última revisión: 21 de agosto de 2020

Índice

Objetivos del tema

En este capítulo se describe la gestión económica de los sistemas centralizados, y más concretamente se introduce la operación de los mismos, en un horizonte temporal diario. Este tipo de gestión está vigente en muchos sistemas eléctricos, y en particular en aquellos de pequeño tamaño en los que implantar un mercado competitivo puede ser muy difícil. En el tema se describen técnicas simplificadas para la optimización de la operación, para lo que se incluye una breve introducción a la optimización con restricciones. La aplicación de estos métodos en mercados de energía eléctrica puede servir como modelo de referencia para verificar si los mercados se estan comportanto eficientemente.

Los objetivos de este capítulo son los siguientes:

- Conocer las tareas de gestión económica de la operación de un sistema eléctrico según el horizonte temporal.
- Conocer los métodos de gestión económica óptima de generación térmica e hidráulica, de forma simplificada.
- Introducir a la optimización con restricciones.
- Conseguir una idea intuitiva de cuál es la gestión más adecuada de un sistema hidrotérmico y poder compararlo con la gestión de los sitemas existentes.

1. Introducción. Secuencia temporal de la gestión económica en un sistema eléctrico centralizado.

En este tema se describirán brevemente las tareas que hay que realizar para que, con un parque de generación dado, el coste de la energía sea mínimo. El alcance del problema se reduce, puesto que no se tiene que determinar la potencia instalada de las centrales, y por ello el modelo de la generación puede ser más detallado. El problema se va a plantear para un sistema hidrotérmico, es decir, con generación gestionable de origen térmico o hidráulico. El problema se dividirá en tres, o mejor dicho, se plantearán tres problemas diferentes en función del tiempo de anticipación con que se cuente para gestionar la generación. En primer lugar se indicará cuál es la gestión óptima de los sistemas contando con un número de centrales térmicas ya conectadas y suministrando potencia. Este es el problema del **despacho económico**. Puesto que las centrales térmicas necesitan un tiempo desde que se decide su conexión hasta que se suministra energía a la red, la puesta en marcha debe decidirse con horas de antelación, y la programación se realiza por tanto con este adelanto, típicamente de un día. Este proceso se denomina **programación de la generación** (*unit commitment*). Finalmente se indicará cómo se debe gestionar la producción de las centrales hidráulicas teniendo en cuenta que deben hacer uso de una parte de la energía almacenada en el embalse, que ha sido fijada en un proceso de optimización a más largo plazo. El problema de determinar de forma óptima la producción de las centrales térmicas e hidráulica para abastecer una demanda dada se denomina **coordinación hidrotérmica**. Una variante considera que una parte de las centrales hidráulicas son centrales de bombeo. Cada uno de estos problemas, especialmente los dos últimos, es de gran complejidad, por el número de las centrales de que consta un sistema eléctrico y por las numerosas restricciones técnicas de las centrales térmicas e hidráulicas. En esta sección solo se abordarán de una forma muy simplificada.

Las distintas actividades que se realizan tienen horizontes temporales distintos (véase la Figura 1).

Las actividades de control en tiempo real tienen por objetivo la adecuación de la generación a la demanda, y el mantenimiento de las magnitudes del sistema dentro de los límites de seguridad. Los criterios que se siguen son predominantemente técnicos y se aplican en muchos casos de forma automática.

El despacho económico consiste en regular la potencia que suministran los generadores ya conectados a fin de que el coste total de la energía eléctrica sea mínimo. Las decisiones pueden aplicarse en tiempo real a fin de ajustar la producción a la demanda de cada instante. Su horizonte temporal es de unas pocas horas. El flujo de potencia óptimo aborda este mismo problema de una forma más flexible, pero normalmente este procedimiento no se utiliza en tiempo real en los sistemas, pues requiere de más tiempo de cálculo.

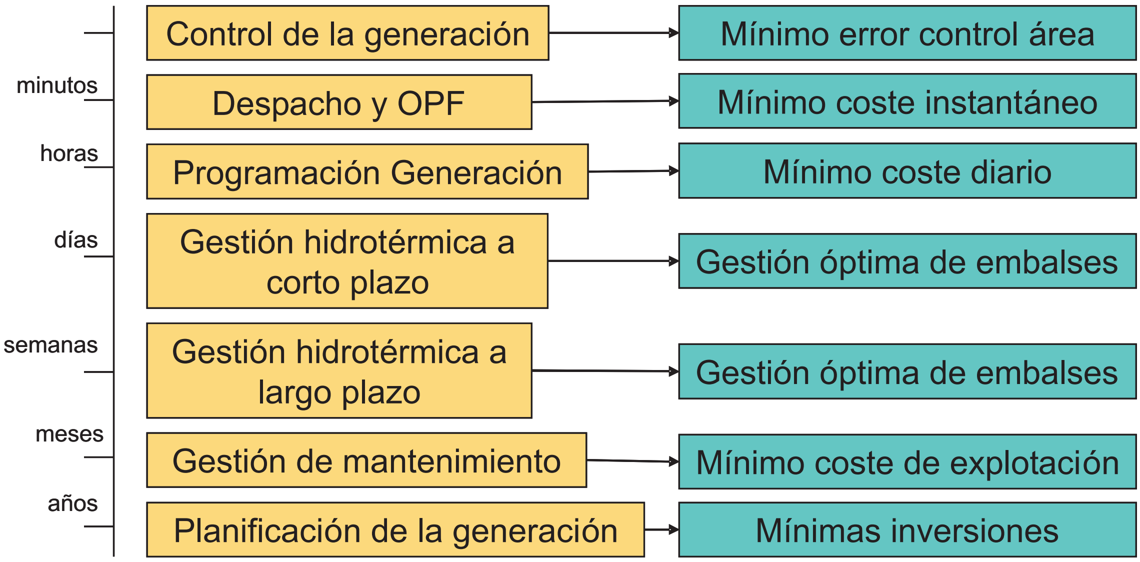

Figura 1: Horizontes de las actividades en un sistema centralizado.

La asignación de generación térmica consiste en tomar las decisiones de conexión o desconexión de grupos térmicos con el fin de que el coste de explotación del sistema a lo largo de un día tenga un coste mínimo. Puesto que estas maniobras pueden requerir varias horas, es necesario realizar esta actividad con una anticipación suficiente. En los sistemas eléctricos suele realizarse una programación diaria de la generación con un día de anticipación. Esta programación puede sufrir alteraciones a lo largo del día considerado, teniendo en cuenta las restricciones de las centrales que intervienen y las diferentes eventualidades que pueden producirse a lo largo de la operación.

La coordinación hidrotérmica es un problema de gran complejidad matemática que se debe resolver en diferentes horizontes temporales. En el horizonte diario, se determina la energía producida por las centrales hidráulicas, junto con la de las centrales térmicas de forma que el coste de explotación conjunto sea mínimo. Para ello es necesario saber la cantidad de recurso hidráulico con el que se cuenta. Esto es el resultado de una programación a medio y corto plazo que tiene en cuenta las aportaciones previsibles de los ríos, así como los usos que tiene el agua, además de la producción de energía eléctrica. Esta programación se realiza con carácter semanal, estacional, anual, o incluso interanual en determinados embalses.

En la programación con horizonte diario o menor, hay que tener también en cuenta la capacidad de transporte de la red, a la que se tienen que adaptar los programas de generación.

Con periodicidad anual e interanual deben realizarse también los programas de mantenimiento de las centrales térmicas e hidráulicas, así como las recargas de combustible de las centrales nucleares, puesto que durante estos períodos las centrales no están disponibles. También tiene que haber programas de mantenimiento de las redes de transporte y distribución que determinen la disponibilidad con la que se puede contar en el futuro.

Por último, las tareas de planificación de la generación que es necesario instalar para cubrir los incrementos de demanda prevista y sustituir a las centrales cuyo ciclo de vida se acaba, así como de la red de transporte que permita enlazar los generadores con los consumidores en el futuro. La planificación persigue conseguir que el coste total de la energía eléctrica sea el mínimo posible, atendiendo a restricciones de suministro de combustible, medioambientales, de uso del terreno y de estrategia energética global. Estas tareas deben llevarse a cabo con un horizonte temporal de varios años, pues se tienen que tener en cuenta los largos tiempos de construcción de centrales y desarrollo de la red. La planificación de la generación se aboradará en un capítulo posterior.

2. Despacho económico de centrales térmicas.

En este apartado se estudiará el reparto, entre las centrales conectadas a un sistema eléctrico en un momento dado, de la potencia que tiene que suministrar cada central de forma que el coste del sistema sea mínimo cuando están cubriendo una demanda dada. Este método se denomina *despacho económico*. Por simplicidad, se considerará que todas las centrales que abastece la demanda son centrales térmicas.

2.1. Despacho económico sin pérdidas. Planteamiento del problema.

2.1.1. Planteamiento intuitivo.

Cuando no se consideran las pérdidas en la red, la potencia que suministra cada central es función del coste de producción de cada una. Sea f_i el coste horario de la central i en R/h, y P_{gi} la potencia generada por la central i, en la hora h, en MW [1]. El coste incremental de la central, en R/MWh, es $\frac{df_i}{dP_{gi}}$. Por consiguiente, si la curva de consumos del grupo i es cuadrática, se puede escribir

$$f_i = \frac{a_i}{2} P_{gi}^2 + b_i P_{gi} + c_i \text{ (R/h)}$$

y el coste incremental en la hora i, que se denominará λ_i, será:

$$\lambda_i = \frac{df_i}{dP_{gi}} = a_i P_{gi} + b_i \text{ (R/MWh)}$$

donde a_i, b_i y c_i son constantes.

Se ha definido el coste incremental, o marginal, como el coste de combustible necesario para producir un MWh más. Supóngase que la potencia demandada la suministran dos centrales, y que la división de la carga entre estas centrales es tal que el coste marginal de una es mayor que el de la otra. En este caso, resulta rentable transferir algo de la producción de la central con coste marginal mayor a la de menor coste marginal, puesto que la reducción de coste debida a la disminución de producción de la central con mayor coste marginal es mayor que el incremento de coste producido por aumentar en la misma cantidad la generación de la central con menor coste marginal. La transferencia de generación de una central a otra puede seguir haciéndose con una reducción en el coste total de combustible hasta que los costes marginales sean iguales. Es decir, en un sistema sin pérdidas, todas las centrales deben trabajar con los mismos costes marginales para alcanzar el óptimo económico. Con este criterio se deberá asignar potencia a cada central térmica que está conectada a la red.

Sean, por ejemplo, dos centrales que trabajan con los mismos costes marginales:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{df_1}{dP_{g1}} = a_1 P_{g1} + b_1 \\ \lambda &= \frac{df_2}{dP_{g2}} = a_2 P_{g2} + b_2 \end{aligned}$$

Se resuelve esta ecuación para P_{g1} y P_{g2}, y se obtiene

$$\begin{aligned} P_{g1} &= \frac{\lambda - b_1}{a_1} \\ P_{g2} &= \frac{\lambda - b_2}{a_2} \end{aligned}$$

Al sumar estas dos últimas ecuaciones y al resolverlas para λ se obtiene, generalizando para K centrales

$$\lambda = \left(\sum_{i=1}^{K} \frac{1}{a_i} \right)^{-1} P_{gT} + \left(\sum_{i=1}^{K} \frac{1}{a_i} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{K} \frac{b_i}{a_i} \right)$$

[1] Para simplificar la notación matemática, se considerarán potencias medias horarias e intervalos horarios. De esta manera coincide la potencia media con la energía producida en el intervalo. Actualmente los intervalos temporales de explotación son en muchos casos medio o cuartohorarios.

es decir

$$\lambda = a_T P_{gT} + b_T$$

en donde

$$\begin{aligned} a_T &= \left(\sum_{i=1}^{K} \frac{1}{a_i} \right)^{-1} \\ b_T &= a_T \left(\sum_{i=1}^{K} \frac{b_i}{a_i} \right) \\ P_{gT} &= \sum_{i=1}^{K} P_{gi} \end{aligned}$$

Puesto que las centrales tienen especificados límites de potencia superior e inferior, puede que algunas centrales no puedan trabajar con los mismos costes marginales. Si esto sucede, se asigna a la unidad correspondiente la potencia límite (máxima o mínima) y se realiza el despacho económico al resto de los grupos.

Cuando los costes de la central dependen linealmente de la potencia, las funciones de coste tienen la forma siguiente:

$$f_i(P_{gi}) = b_i P_{gi} + c_i \text{ (R/h)}$$

En tal caso el coste marginal de la central es constante, e igual a b_i. Los distintos grupos no podrán operar con los mismos costes marginales, salvo en el caso trivial de tener el mismo valor de b_i). Si los costes marginales de todas las centrales son diferentes entre sí, solo una de ellas marcará el coste marginal del sistema, y su potencia estará comprendida entre su mínimo y su máximo. Las de coste marginal inferior producirán la potencia máxima, y las de coste marginal superior su potencia mínima.

2.1.2. Planteamiento general.

El problema del despacho económico sin pérdidas de un sistema de N centrales se puede plantear como un problema de optimización que se expresa de la siguiente manera [2]:

$$\begin{array}{ll} & \min_{P_i} \sum_i f_i(P_i) \\ \\ \text{s.a.} & P_d - \sum_i P_i = 0 \\ & P_i - P_i^{max} \leq 0 \quad\quad i = 1, \ldots, N \\ & P_i^{min} - P_i \leq 0 \quad\quad i = 1, \ldots, N \end{array}$$

La función lagrangiana de este problema de optimización viene dada por:

$$\mathcal{L} = \sum_i f(P_i) + \lambda(P_d - \sum_i P_i) + \sum_i \mu_i^+ (P_i - P_i^{max}) + \sum_i \mu_i^- (P_i^{min} - P_i)$$

El óptimo tendrá que cumplir las condiciones de Kuhn-Tucker (véase el Apéndice A.2), que implican que se tiene que cumplir, para cada central i, que:

$$f_i'(P_i) - \lambda + \mu_i^+ - \mu_i^- = 0 \tag{1}$$

Puesto que por las condiciones de Kuhn-Tucker, $\mu_i^+, \mu_i^- \geq 0 \ \forall i$, se pueden producir las siguientes situaciones en cada una de las centrales:

$$\begin{array}{lll} P_i^{min} < P_i < P_i^{max} & \mu_i^+ = \mu_i^- = 0 & f'(P_i) = \lambda \\ P_i = P_i^{max} & \mu_i^+ > 0,\ \mu_i^- = 0 & f'(P_i) < \lambda \\ P_i = P_i^{min} & \mu_i^+ = 0,\ \mu_i^- > 0 & f'(P_i) > \lambda \end{array}$$

Las centrales que se encuentran en la primera situación, en la que la potencia está entre sus límites, son las que determinan el coste marginal del sistema, puesto que este es igual a sus costes marginales. El

[2] Se da una introucción a la optimización con restricciones en el Apéndice A

coste marginal de las centrales cuya potencia es igual a su valor máximo es inferior al coste marginal del sistema: en efecto, sería deseable aumentar su producción, pero no es posible. Al revés, las centrales cuya potencia está en su límite inferior tienen unos costes marginales superiores al coste marginal del sistema. Sería deseable reducir su potencia, pero tampoco es posible. Recérdese que en el problema del despacho económico no se toman decisiones sobre la conexión o desconexión de centrales.

2.2. Despacho económico con pérdidas.

En los sistemas eléctricos reales se producen pérdidas de potencia, de tal forma que la generación es superior a la demanda. Para el despacho económico es necesario considerar dichas pérdidas, por lo que se plantea el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lll} & \min_{P_i} \sum_i f_i(P_i) & \\ & & \\ \text{s.a.} & P_d + P_l - \sum_i P_i = 0 & \\ & P_i - P_i^{max} \leq 0 & i = 1, \ldots, N \\ & P_i^{min} - P_i \leq 0 & i = 1, \ldots, N \end{array}$$

en donde P_l son las pérdidas del sistema.

La lagrangiana del problema de optimización tiene la expresión siguiente (se han excluido, por simplicidad, las restricciones de desigualdad):

$$\mathcal{L} = \sum_i f(P_i) + \lambda(P_d + P_l - \sum_i P_i)$$

Por tanto, la expresión del gradiente de la lagrangiana con respecto a las variables de optimización es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_i} = \frac{df_i}{dP_i} - \lambda \left(1 - \frac{\partial P_l}{\partial P_i}\right) = 0$$

que se puede expresar como:

$$FP_i \cdot \frac{df_i}{dP_i} = \lambda \tag{2}$$

donde FP es un *factor de penalización*, cuya expresión viene dada por:

$$FP_i = \frac{1}{1 - \frac{\partial P_L}{\partial P_i}} \tag{3}$$

Obsérvese que la ecuación (2) indica que los costes marginales de una central dada ($\frac{df_i}{dP_{gi}}$) son distintos de los costes marginales del sistema (λ) en función del valor del factor de penalización de la central. Este factor es tanto mayor, según la ecuación (3), cuanto más dependen las pérdidas de la potencia inyectada por la central. Es decir, se reduce la producción de aquellas centrales que producen más pérdidas en el sistema. Los factores de penalización pueden ser tanto positivos como negativos.

La dificultad radica en encontrar la expresión que liga las pérdidas del sistema con las potencias producidas por las centrales. Hay distintos métodos para realizar esto, pero aquí solo se describirá uno muy simple, el de los coeficientes B.

Coeficientes B de estimación de las pérdidas. El procedimiento de los coeficientes B consiste en considerar que las pérdidas en el sistema tienen la siguiente expresión cuadrática, en función de las potencias inyectadas:

$$P_l = \sum_i \sum_j P_i B_{ij} P_j + \sum_i B_{oi} P_i + B_{oo}$$

En esta expresión se puede observar que las pérdidas tienen una dependencia cuadrática de las potencias inyectadas. Se añade también un término lineal, y uno constante. Sin embargo, los coeficientes B_{ij}, B_{oi} y B_{oo} dependen del estado de la red, por lo que deben ser estimados para cada situación que se desee considerar.

Expresión del despacho con pérdidas con coeficientes B. Si las pérdidas del sistema se modelan mediante los coeficientes B, la expresión de los factores de penalización es:

$$FP_i = \frac{1}{1 - 2\sum_j B_{ij}P_j - B_{oi}}$$

En este caso, suponiendo que los costes de las centrales semodelen mediante funciones cuadráticas,

$$f_i = \frac{a_i}{2}P_i^2 + b_iP_i + c_i$$

las ecuaciones correspondientes a la igualación del gradiente a cero conducen a las siguientes expresiones:

$$\begin{array}{ll} a_iP_i + b_i = \lambda\left[1 - \left(2\sum_j B_{ij}P_j + B_{oi}\right)\right] & i = 1, \ldots, N \\ P_d + \left(\sum_i\sum_j P_iB_{ij}P_j + \sum_i B_{oi}P_i + B_{oo}\right) - \sum_i P_i = 0 & \end{array}$$

donde N es el número de centrales presentes en el sistema.

Este es un sistema de ecuaciones no lineales, que deberán ser resueltas mediante un método iterativo.

3. Flujo de potencia óptimo.

El flujo de potencia óptimo es una generalización del despacho económico que tiene en cuenta las restricciones de red. Presenta numerosas ventajas con respecto al despacho económico, entre las que se pueden citar:

- No hace falta formular las pérdidas explicitamente.
- Se pueden incluir otras restricciones: límites de potencia por líneas, límites de tensión, etc.
- Se pueden considerar otras variables de control: potencias, consignas de tensión, conexión de condensadores, etc.
- Se pueden optimizar distintas funciones objetivo.

A cambio, tiene unos requisitos computacionales más altos que el despacho económico.

3.1. Planteamiento del problema.

El flujo de potencia óptimo se puede plantear como un problema de optimización de la forma que se indica en el sistema de ecuaciones (4)[3].

$$\begin{array}{ll} & \min_{\mathbf{a}} \sum_i f_i(\mathbf{a}) \\ & \\ \text{s.a.} & \mathbf{g}(\mathbf{z}) = 0 \\ & \mathbf{h}(\mathbf{z}) \leq \mathbf{h}^{max} \\ & \mathbf{h}(\mathbf{z}) \geq \mathbf{h}^{min} \\ & \mathbf{z} \leq \mathbf{z}^{max} \\ & \mathbf{z} \geq \mathbf{z}^{min} \end{array} \tag{4}$$

En la ecuación (4) la función objetivo es el coste de explotación del sistema, que se pretende minimizar. Sin embargo, se podría escoger otra función objetivo que sea de interés.

$\mathbf{z}$ son las variables del sistema, que son de dos tipos: *variables de estado*, que son aquellas variables sobre las que no se puede ejercer ningún control, y *variables de control*, que son aquellas cuyo valor puede establecerse, y que son también las variables de optimización, y que se denotan mediante la letra $\mathbf{a}$. Además, existen *especificaciones* en el sistema, que deben considerarse enel proceso de optimización. Todas estas variables se deberán expresar en magnitudes unitarias, para una formulación más simple de las ecuaciones.

[3] Las letras en negrita indican vectores.

Aunque el flujo de potencia óptimo se puede plantear de formas diferentes, con distintas variables de optimización y funciones objetivo, las variables de un sistema eléctrico pueden clasificarse tal como se muestra en la tabla 1.

tipo de nudo	P	Q	u	δ
nudo PQ	especificación	especificación	v. estado	v. estado
nudo PV	v. control	v. estado	v. control	v. estado
oscilante	v. estado	v. estado	v. control	especificación

Tabla 1: Consideración habitual de las variables de un sistema eléctrico en un flujo de potencia óptimo

Las restricciones de igualdad $\mathbf{g}(\mathbf{z}) = 0$ son las ecuaciones de flujo de potencia, que deben cumplirse para todos los nudos. Estas ecuaciones pueden expresarse de la forma general:

$$\begin{array}{c} \mathbf{p}^o - \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{e}) = 0 \\ \mathbf{q}^o - \mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{e}) = 0 \end{array}$$

donde $\mathbf{x}$ denota las variables de estado, $\mathbf{a}$ las variables de control y $\mathbf{e}$ las especificaciones; $\mathbf{p}^o$ y $\mathbf{q}^o$ son las especificaciones de potencia activa y reactiva de los nudos, que pueden ser variables de control o de estado según el tipo de nudo de que se trate.

Las restricciones de desigualdad pueden ser funciones $\mathbf{h}(\mathbf{z})$ de las variables, como los flujos de potencia por las líneas, o valores límites de las propias variables, como las tensiones máximas y mínimas admisibles, o las potencias activas máximas y mínimas de los generadores.

La lagrangiana de este problema de optimización se puede expresar de la forma siguiente:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{e}, \lambda) = f(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{e}) + \lambda^t \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{e}) \tag{5}$$

En esta expresión no se han incluido las restricciones de desigualdad, por simplicidad.

La solución del problema se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones resultante de igualar el gradiente de la lagrangiana a cero, es decir:

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{L}_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right]^t \lambda \\ \nabla \mathcal{L}_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{a}} &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} + \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{a}}\right]^t \lambda \\ \nabla \mathcal{L}_\lambda = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{e}) \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones es no lineal, incluye las ecuaciones del flujo de carga, y además, cuando se incluyen las condiciones de Kuhn-Tucker, se deben probar muchos casos antes de llegar a la solución. En general, los métodos para la obtención de la solución del flujo de potencia requieren de técnicas específicas de optimización que no van a ser tratadas en este capítulo.

Los multiplicadores de Lagrange en este problema tienen un significado muy interesante. Para poderlo apreciar mejor, se expresa la ecuación (5) de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{e}, \lambda) = \sum_{i=1}^{N_g - 1} f_i(p_i) + f_{osc}(p_{osc}) + [\cdots, \lambda_{pi}, \lambda_{qi}, \cdots] \begin{bmatrix} \cdots \\ p_i^o - p_i(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \\ q_i^o - q_i(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \\ \cdots \end{bmatrix} \tag{6}$$

Y se puede comprobar fácilmente que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i^o} = \lambda_{pi}$$

Es decir, el multiplicador de Lagrange λ_{pi} es la sensibilidad de la función lagrangiana con respecto a la potencia activa inyectada en el nudo i. Pero la función lagrangiana, en el punto óptimo es igual a la función objetivo del problema. Por tanto, λ_{pi} es la sensibilidad de los costes del sistema a la potencia activa inyectada en el nudo i. Se denominará a este valor*coste incremental, o marginal, del nudo i.* Se puede hacer el mismo razonamiento para la potencia reactiva inyectada, aunque este valor se utiliza menos.

3.2. Flujo de potencia óptimo en corriente continua.

Una simplificación del problema consiste en emplear únicamente las ecuaciones del flujo de carga en corriente continua. Esto elimina la no linealidad de las ecuaciones, lo que facilita su resolución. A cambio, la solución es aproximada, y las únicas variables de control son las potencias activas de los generadores, lo que restringe el ámbito de aplicaciones de este procedimiento.

El problema de optimización se plantea de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} & \min_{p_i} \sum_{i=1}^{G} f_i(p_i) + f_{osc}(p_{osc}) & \\ & & \\ \text{s.a.} & \mathbf{B}'(\delta) = \mathbf{p} & \\ & \mathbf{p}_f = \mathbf{H}\mathbf{p} & \\ & p_i^{min} \leq p_i \leq p_i^{max} & i = 1, \ldots, G \\ & p_{osc}^{min} \leq p_{osc} \leq p_{osc}^{max} & \\ & p_{f,k}^{min} \leq p_{f,k} \leq p_{f,k}^{max} & k = 1, \ldots, R \end{array} \tag{7}$$

en la que $\mathbf{p}$ es el vector de potencias p_i inyectadas en todos los nudos, excepto el nudo oscilante, $\mathbf{p}_f$ es el vector de las potencias circulantes por las ramas del sistema, G es el número de generadores, quitando el del nudo oscilante, y R es el número de ramas. H es la relación (lineal) que existe entre la potencia circulante por las ramas y la inyectada en los nudos, es decir, la matriz de coeficientes PTDF.

Se puede observar que el problema resultante es un problema lineal, cuya resolución es más sencilla que la del problema completo.

4. Programación de la generación térmica.

4.1. Introducción.

En un sistema eléctrico, la demanda varía a lo largo de un día, que típicamente tiene la forma mostrada en la Figura 2. Por tanto, el número de centrales que deben estar conectadas varía a lo largo del día, pues resultaría antieconómico, o incluso técnicamente inviable, mantener conectadas a lo largo de todo el día las centrales que van a utilizarse durante el momento de máxima potencia. Para un parque de generación exclusivamente térmico, la estrategia habitual consiste en mantener conectadas centrales con bajos costes variables, las llamadas **centrales de base**, durante todo el día, y conectar solo las de costes variables más altos a medida que se necesita. Las centrales con costes variables más altos, las llamadas **centrales de punta**, solo se conectarían unas cuantas horas al día, o incluso solo unos cuantos días al año. La Figura 2 ilustra esta estrategia.

La programación de la generación (*unit commitment* en inglés) consiste en determinar las centrales que deben estar conectadas, y la potencia que deben proporcionar, en un período determinado, de forma que el coste de explotación durante este período sea mínimo. Puesto que las centrales térmicas necesitan un determinado tiempo para conectarse o desconectarse, el período de estudio suele prolongarse varias horas.

Para que las centrales térmicas conozcan con la antelación suficiente su programa de funcionamiento para un día, se realiza una programación de la generación el día previo. Sobre esta programación pueden producirse alteraciones destinadas a resolver situaciones inesperadas.

Tal como se describe en este apartado, las centrales de las que se realiza la programación son únicamente centrales térmicas. La participación óptima de las centrales hidráulicas en la cobertura de la demanda se describirá en el apartado 5.

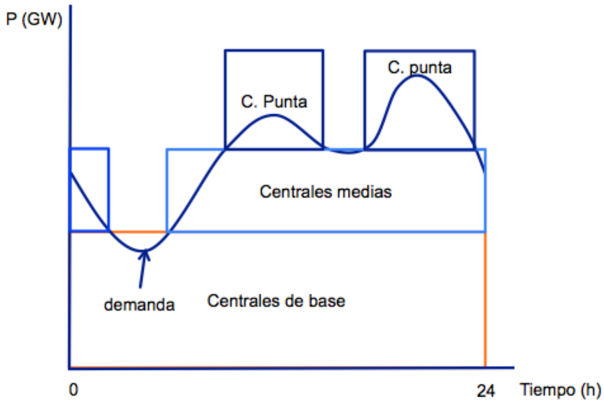

Figura 2: Demanda típica y su cobertura en un día laborable.

4.2. Planteamiento del problema de programación de la generación.

En los sistemas reales, con cientos de líneas y decenas de centrales, la programación de generación es un problema de enorme complejidad matemática, y que implica considerables tiempos de cálculo. Matemáticamente, se trata de un problema de optimización no lineal con variables binarias (las relacionadas con la conexión o desconexión de una central).

En el proceso de optimización, se deben tener en cuenta las siguientes restricciones, entre otras:

- Los tiempos de puesta en marcha y parada de las centrales, y el coste de cada una de estas maniobras.
- Los tiempos mínimos de parada o funcionamiento que tienen que tener las centrales.
- La reserva que hay que mantener para responder a las posibles contingencias que se produzcan.
- Las centrales que deben funcionar por diversas consideraciones: recurso primario no almacenable (parques eólicos), usos prioritarios (centrales de producción de calor) u otros.
- La imposibilidad de poner en marcha dos grupos térmicos de una misma central simultáneamente.

Para que la solución sea económicamente óptima y técnicamente factible, es necesario realizar un flujo de potencia óptimo para cada escenario de generación, incluyendo restricciones de seguridad. Esto complica aún más el problema, que conduciría en los sistemas eléctricos reales, a procesos de gran complejidad matemática, para los que se proponen soluciones que tratan de reducir los tiempos de cálculo y garantizar la convergencia del proceso.

En este proceso de optimización se deben tomar decisiones sobre las centrales que es preciso conectar y desconectar a lo largo de un día. Por otra parte, las restricciones de red implican un problema no lineal. Por tanto se trata de un problema de optimización no lineal con variables binarias (estado de las centrales conectado/desconectado), con muchas variables y restricciones, lo que lo convierte en un problema matemático de enorme complejidad. Por esta razón, las restricciones que impone la red de transporte no suelen considerarse en la formulación del problema, y no se hará en la formulación que sigue.

Las formulación del problema de asignación de la generación en este capítulo se hace con las siguientes condiciones:

- Los costes de las centrales son lineales por tramos. La expresión del coste horario para una central i es:

$$f_i(P_i) = c_i + b_{0i}P_i^{min} + \sum_{j=1}^{J} b_{ij}P_{ij} \quad \text{(R/h)}$$

  en donde c_i es el término fijo de la expresión de costes, b_{0i} es el coste marginal a potencia mínima, P_i^{min}, P_{ij} es la potencia de cada tramo j en que se ha dividido el rango de potencias de la central, y b_{ij} el coste marginal de cada tramo; se ilustra esta expresión en la Figura 3.

- Se consideran costes de arranque y parada, cuyo valor no depende de las horas que una central lleve parada o en funcionamiento.
- No hay tiempos mínimos de parada ni de funcionamiento.
- Se consideran los gradientes máximos de subida y de bajada de las centrales.
- Se tiene en cuenta el margen de reserva.
- No se consideran las restricciones de red ni las pérdidas.

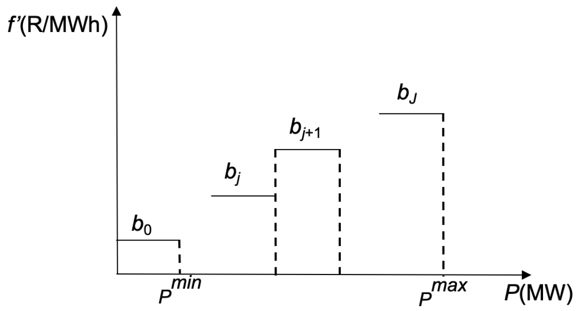

Figura 3: Costes marginales por tramos de una central (se ha suprimido por simplicidad el subíndice i).

En estas condiciones las ecuaciones del problema de optimización son las siguientes:

$$\text{mín} \quad \sum_t^T f(P_{i,t}, x_{i,t}, y_{i,t}) = \sum_t^T \sum_i^N \left(u_{i,t} \left(c_i + b_{0i} P_i^{min}\right) + \sum_j b_{ij} P_{ij,t} + x_{i,t} CA_i + y_{i,t} CP_i \right) \tag{8}$$

$$\text{s.a.} \quad P_{i,t} = u_{i,t} P_i^{min} + \sum_j^J P_{ij,t} \qquad \forall i, t \tag{9}$$

$$\sum_i^N P_{i,t} = P_{D,t} \qquad \forall t \tag{10}$$

$$\sum_i^N u_{i,t} P_i^{max} \geq k_R P_{D,t} \qquad \forall t \tag{11}$$

$$P_{i,t} - P_{i,t-1} \leq R_i^{sub} + x_{i,t} \left(P_i^{min} - R_i^{sub}\right) \qquad \forall i, t \tag{12}$$

$$P_{i,t-1} - P_{i,t} \leq R_i^{baj} + y_{i,t} \left(P_i^{min} - R_i^{baj}\right) \qquad \forall i, t \tag{13}$$

$$u_{i,t} - u_{i,t-1} = x_{i,t} - y_{i,t} \qquad \forall i, t \tag{14}$$

$$x_{i,t} + y_{i,t} \leq 1 \qquad \forall i, t \tag{15}$$

$$0 \leq P_{ij,t} \leq u_{i,t} P_{ij}^{max} \qquad \forall i, j, t \tag{16}$$

en donde los símbolos tienen el siguiente significado:

- Índices y conjuntos

i	Índice de centrales
j	Índice de tramos en que se ha dividido el rango de potencia de una central
t	Índice de intervalos horarios
N	Número de centrales
J	Número de tramos considerados
T	Número de horas consideradas

- Datos y parámetros

CA_i	Costes de puesta en marcha de la central i (R)
CP_i	Costes de parada de la central i (R)
c_i	Término fijo de la función de costes horarios de la central i (R/h)
b_{ij}	Coste marginal del tramo j de la central i (R/MWh)
b_{0i}	Coste marginal del tramo de la central i correspondiente a su potencia mínima (R/MWh)
$P_i^{min/max}$	Potencia mínima/máxima de la central i (MW)
P_{ij}^{max}	Potencia máxima del intervalo j la central i (MW)
$P_{D,t}$	Potencia media demandada durante el intervalo horario t (MW)
k_R	Coeficiente multiplicador que señala el margen de reserva estipulado (p.u.)
$R_i^{sub/baj}$	Rampa máxima a subir/bajar de la central i (MW/h)

- Variables continuas

$P_{i,t}$	Potencia producida por la central i en el intervalo horario t(MW)
$P_{ij,t}$	Potencia producida correspondiente al intervalo j de la central i en el intervalo horario t(MW)

- Variables binarias

$u_{i,t}$	Variable que vale 1 si la central i está conectada en el intervalo t, y 0 en el caso contrario
$x_{i,t}$	Variable que vale 1 si la central i se conecta en el intervalo t, y 0 en el caso contrario
$y_{i,t}$	Variable que vale 1 si la central i se desconecta en el intervalo t, y 0 en el caso contrario

Se trata de un problema de optimización lineal entero-mixto, con variables continuas y binarias. La explicación de las ecuaciones es como sigue.

La función objetivo (8) consta de cuatro términos que corresponden, en primer lugar, a los términos fijos y variables de las potencias mínimas de las centrales, que solo se producen cuando la central está conectada, por lo que se multiplican por la variable binaria $u_{i,t}$ que indica que la central está en funcionamiento en el intervalo horario correspondiente. El siguiente término es el debido a los costes marginales de cada tramo multiplicados por la potencia generada de cada uno de ellos. Los dos últimos términos son los costes de arranque y parada de la central, que solo se producen cuando la central arranca o para.

En la restricción (9) se calcula la potencia generada por cada central a partir de la potencia de cada uno de los tramos. La ecuación (10) establece la igualdad de generación y demanda y la (11) la especificación de necesidad de reserva, que debe ser cubierta con centrales ya conectadas en el intervalo horario correspondiente. Las dos siguientes ecuaciones (12) y (13) son las restricciones de rampa, con un término añadido en cada una que permite que se pueda conectar o desconectar la central si la potencia mínima es superior a la rampa admisible.

Las ecuaciones (14) y (15) son las que ligan las variables binarias: de esta forma, se arrancan solo las centrales paradas y se desconectan las centrales que están en funcionamiento. Además, no pueden arrancar y desconectarse en un mismo intervalo horario.

Por último, la ecuación (16) limita la potencia que se puede producir en cada tramo a la estipulada en cada uno de ellos.

5. Coordinación hidrotérmica.

5.1. Centrales hidráulicas.

Las centrales hidráulicas no tienen costes de combustible, solo de operación y mantenimiento, que no se tomarán en consideración en este capítulo.

La potencia de una central hidráulica depende del salto del embalse y del caudal de agua turbinada. El salto del embalse depende del nivel del agua embalsada, y por lo tanto, varía según se va vertiendo agua. En periodos de tiempo pequeños (hasta un día), y para embalses grandes, sin embargo, puede considerarse que el salto no varía, y que por tanto la potencia depende exclusivamente del caudal. La relación entre la potencia y el caudal, realizando algunas simplificaciones, se puede expresar como:

$$q(P_H) = \frac{\alpha_H}{2} P_H^2 + \beta_H P_H + \omega_H (\mathrm{m}^3/\mathrm{h})$$

La energía que puede suministrar una central hidráulica en un período de tiempo está limitada por el agua que puede desembalsar. La cantidad de agua que puede desembalsarse en, por ejemplo, un día, tiene que especificarse en función de muchos factores: las aportaciones de agua previstas en el embalse, los niveles máximos y mínimos del embalse, los embalses que haya aguas arriba y aguas abajo del embalse considerado, el caudal mínimo que tiene que circular por el río, etc. Esta tarea exige una planificación muy compleja de los recursos hidráulicos, que determine la energía que debe producirse en un día determinado.

La programación hidráulica se suele dividir en programación a corto plazo, cuyo período de estudio es entre un día y una semana, y la programación a largo plazo, que puede llegar a varios años en los embalses de regulación hiperanual.

La programación hidráulica es diferente en cada sistema eléctrico, o hidrológico, puesto que se tiene que ajustar a la capacidad y situación de los embalses existentes, el régimen de precipitaciones de la zona, el carácter de los ríos, la utilización de los embalses, etc. Con carácter general, se dividen las distintas programaciones hidráulicas en tres tipos:

- Solo generación hidráulica: Toda la energía eléctrica es de carácter hidráulico. Este caso es muy poco frecuente.
- Programación de energía: En este caso la potencia hidráulica instalada es suficiente para cubrir la carga, pero no hay suficiente agua embalsada para suministrar toda la potencia.
- Mixto: Es el caso más frecuente. La generación hidráulica solo cubre una parte de la demanda, que es además abastecida con otros tipos de generación.

En este capítulo solo se abordará la programación mixta a corto plazo.

5.2. Planteamiento del problema de coordinación hidrotérmica. Formulación simple.

A partir de las especificaciones indicadas, se debe determinar la energía que debe producirse hora a hora del día considerado de forma que el coste de operación conjunto del sistema hidrotérmico a lo largo del día sea mínimo. Las restricciones que se deben considerar en la operación de la central hidráulica serán:

$$\sum_{j=1}^{jmax} n_j P_{Hj} = E_H$$

$$P_{Hmin} \leq P_{Hj} \leq P_{Hmax} \quad \forall j = 1 \ldots jmax$$

donde

P_{Hj} es la potencia generada por la central hidráulica en el intervalo j.

$jmax$ es el número de intervalos considerados en un período (24 intervalos de una hora en un período de un día, por ejemplo).

n_j es la duración del intervalo j en horas.

P_{Hmin} es la potencia mínima que puede suministrar la central hidráulica.

P_{Hmax} es la potencia máxima (nominal) que puede suministrar la central hidráulica.

E_H es la energía que la central hidráulica tiene que producir en todo el período.

A partir de estos requisitos, que se deben establecer para cada central hidráulica del sistema, se tiene que obtener el programa óptimo de desembalse de cada central en el período, teniendo en cuenta también las centrales térmicas existentes. Este problema es muy complejo, y para su resolución se realizarán las siguientes simplificaciones:

- Se considerará una única central hidráulica, que sería la agrupación de todas las existentes en el sistema eléctrico.
- Las centrales térmicas existentes se representan por una central térmica equivalente.
- No se tendrán en cuenta las pérdidas eléctricas, ni las de agua en el sistema
- Todos los vertidos de agua producen energía eléctrica.

Por tanto, se puede plantear un problema de optimización consistente en minimizar los costes de generación térmica para todo el período considerado.

$$\begin{array}{lll}
\min & \sum_{j=1}^{jmax} n_j F_{Tj} & \\
 & & \\
\text{s. a} & P_{Tj} + P_{Hj} = P_{dj} & \forall j = 1 \cdots jmax \\
 & \sum_{j=1}^{jmax} n_j P_{Hj} = E_H & \\
 & P_{Tmin} \leq P_{Tj} \leq P_{Tmax} & \forall j = 1 \cdots jmax \\
 & P_{Hmin} \leq P_{Hj} \leq P_{Hmax} & \forall j = 1 \cdots jmax
\end{array}$$

donde

P_{Tj} es la potencia generada por la central térmica en el intervalo j.

P_{Tmin} es la potencia mínima que puede suministrar la central térmica.

P_{Tmax} es la potencia máxima (nominal) que puede suministrar la central térmica.

P_{dj} es la potencia demandada en el intervalo j.

F_{Tj} es el coste de funcionamiento de la central térmica en el intervalo j.

La función lagrangiana de este problema de optimización será:

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{jmax} n_j [f(P_{Tj}) + \lambda_j (P_{dj} - P_{Hj} - P_{Tj})] + \gamma \left\{ \sum_{j=1}^{jmax} n_j P_{Hj} - E_H \right\}$$

Y si se iguala el gradiente de la lagrangiana a cero se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{llll}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{Tk}} = 0 & \Rightarrow & \frac{df(P_{Tk})}{dP_{Tk}} = \lambda_k & \forall k = 1, \ldots, jmax \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{Hk}} = 0 & \Rightarrow & \gamma = \lambda_k & \forall k = 1, \ldots, jmax \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_k} = 0 & \Rightarrow & P_{dj} - P_{Tj} - P_{Hj} = 0 & \forall k = 1, \ldots, jmax \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} = 0 & \Rightarrow & \sum_{j=1}^{jmax} n_j P_{Hj} = E_H &
\end{array}$$

estas ecuaciones se denominan **ecuaciones de coordinación**.

Obsérvese que las tres primeras ecuaciones deben plantearse para cada intervalo del período, en tanto que la última es única para todo el período. Esto impide resolver separadamente el problema hora a hora.

Los multiplicadores de Lagrange que aparecen en las ecuaciones son los vinculados a la igualdad generación-demanda, λ_k, que debe cumplirse para cada intervalo del período k considerado, y el multiplicador γ, que está vinculado a la restricción de igualdad del agua que debe consumirse, y que es único para el sistema. Se puede comprobar fácilmente que este multiplicador es la derivada de la lagrangiana con respecto a la energía hidráulica especificada. Por tanto, es la sensibilidad de la función objetivo ante variaciones de este valor de la energía. Sus unidades son R/MWh y podrían interpretarse como el **precio sombra** del agua. Puesto que todos los λ_k de los intervalos del período considerado deben ser iguales al precio sombra del agua, γ, se deduce que la situación óptima es que los costes marginales se mantengan constantes durante todo el período en que está conectada la central hidráulica.

5.3. Planteamiento del problema de coordinación hidrotérmica. Formulación para varias centrales térmicas.

El problema de optimización de coordinación hidrotérmica extendido a varias centrales térmicas y una central hidráulica equivalente se formula a partir de las ecuaciones de asignación de la generación (8) - (16) del apartado anterior, a las que se añaden las siguientes restricciones:

$$\sum_{t}^{T} P_{H,t} = E_H \tag{17}$$

$$P_{H,t} \leq P_H^{max} \qquad \forall t \tag{18}$$

Además, la ecuación del balance de potencias (10) y de margen de reserva (11) deben incluir la potencia hidráulica, quedando de la siguiente manera:

$$\sum_{i}^{N} P_{i,t} + P_{H,t} = P_{D,t} \qquad \forall t$$

$$\sum_{i}^{N} u_{i,t} P_i^{max} + P_H^{max} \geq k_R P_{D,t} \qquad \forall t$$

Se ha considerado que la central hidráulica puede contribuir a la reserva incluso cuando no está conectada, por la rapidez con que estas centrales pueden arrancar. Se puede observar que en este caso la duración del intervalo es de 1 hora, por lo que $n_j = 1$, y se ha omitido en la formulación.

5.4. Centrales de bombeo.

5.4.1. Principio de funcionamiento.

Las centrales de bombeo tienen, normalmente, un embalse superior y uno inferior. Su papel consiste en consumir energía eléctrica en las horas valle, bombeando agua del embalse inferior al embalse superior, y en generar energía eléctrica las horas punta, turbinando agua desde el embalse superior al inferior. Ambos embalses pueden tener, o no, aportaciones de agua procedentes de ríos. En estas centrales normalmente se emplean turbinas reversibles, que puedan efectuar ambas tareas con el máximo de rendimiento.

Hay tres tipos básicos de centrales de bombeo, en función de cuáles sean las aportaciones de agua que se producen

- Centrales de bombeo puro: en este caso el embalse superior no recibe aportaciones hidráulicas.
- Centrales de bombeo mixto: en estas centrales, tanto el embalse superior como el inferior reciben aportaciones hidráulicas.
- Centrales de bombeo diferencial: en ellas distintos embalses inferiores comparten un mismo embalse superior, más grande.

Este proceso de bombeo y ulterior turbinación comporta pérdidas (el rendimiento total suele estar entre el 65 % y el 70 %), y solo se justifica por el ahorro que supone la sustitución de energía cara (la de las horas punta) por energía más barata (la de las horas valle). El bombeo puede seguir un ciclo diario, o semanal, aprovechando la diferencia en el nivel de demanda entre el día laborable y el día festivo.

La minimización de costes de explotación de un sistema con centrales de bombeo es un problema complejo, que se debe extender a un período de estudio en el que haya diferentes niveles de precios con el fin de que se pueda calcular su rentabilidad, es decir, al menos un día. En este apartado se planteará en condiciones muy simplificadas, de forma que se puedan sacar algunas conclusiones sencillas de la utilidad del bombeo para los sistemas eléctricos.

Las condiciones del problema que se planteará son:

- La central considerada es de bombeo puro y no hay aportaciones hidráulicas adicionales.
- El salto se mantiene constante. Esto es una hipótesis fuerte, pues el nivel de llenado de los embalses puede variar considerablemente a lo largo del ciclo de explotación.
- Hay solo una central térmica, con curva de costes horarios convexa.
- La programación se extiende a 24 horas.
- La central de bombeo tiene tres estados posibles: generación, bombeo o reposo.
- Se especifican el volumen inicial y final.
- El bombeo puede realizarse continuamente, dentro de los límites técnicos.
- El rendimiento del proceso es constante.

Para determinar los intervalos de un período (un día) que se quiere estudiar, se deberá tener en cuenta que el proceso debe ser rentable, es decir, que lo que se ahorra cuando se genera energía hidráulica es más de lo que se gasta cuando se bombea agua. Esto significa que debe haber una diferencia suficiente entre los costes marginales en los que se realizan dichas operaciones.

Se define el rendimiento del proceso η como:

$$\eta = \frac{e_g}{e_b}$$

donde e_g es la energía generada al turbinar un volumen de agua dado, y e_b es la energía consumida al bombear ese mismo volumen de agua.

La variación de costes de operación cuando se genera mediante la generación de bombeo en la hora k será:

$$\Delta f_k = -\lambda_k \Delta P_{Hk}$$

Para producir esta energía habrá sido necesario bombear la cantidad de agua requerida en un intervalo i, lo que habrá supuesto una variación de coste de valor:

$$\Delta f_i = \lambda_i \frac{\Delta P_{Hk}}{\eta}$$

Para que el incremento de costes entre ambas operaciones sea negativo, deberá cumplirse que:

$$\lambda_k \geq \frac{\lambda_i}{\eta} \tag{19}$$

que es la **condición de rentabilidad** de la operación de bombeo.

5.4.2. Programación de la generación térmica con centrales de bombeo

En un sistema con varias centrales térmicas y una central de bombeo, se plantea un problema de optimización como el mostrado en el apartado 4.2. Se parte de las ecuaciones de asignación de la generación (8) - (16), a las que se añaden las siguientes restricciones:

$$E_t = E_{t-1} - \frac{1}{\eta_G} P_{G,t} + \eta_B P_{B,t} \qquad \forall t \tag{20}$$
$$P_{G,t} \leq P_{GB}^{max} \qquad \forall t \tag{21}$$
$$P_{B,t} \leq P_{GB}^{max} \qquad \forall t \tag{22}$$
$$E^{min} \leq E_t \leq E^{max} \qquad \forall t \tag{23}$$
$$\tag{24}$$

En donde las variables y los parámetros son:

- Datos y parámetros

η_B	Rendimiento del proceso de bombeo (p.u.)
η_G	Rendimiento del proceso de turbinación (p.u.)
E^{max}	Máxima energía almacenable en el embalse (MWh)
E^{min}	Mínima energía almacenable en el embalse (MWh)
P_{GB}^{max}	Potencia de la central de bombeo (MW)

- Variables

$P_{G,t}$	Potencia producida por la central de bombeo en el intervalo horario t (MW)
$P_{B,t}$	Potencia consumida por la central de bombeo en el intervalo horario t (MW)
E_t	Energía almacenada en el embalse en el intervalo horario t (MWh)

Mediante la ecuación (20) se calcula la energía almacenada en el embalse que será la almacenada en el intervalo anterior, más la energía bombeada, menos la energía turbinada, ambas afectadas por el rendimiento de los procesos respectivos. Se supone que no hay pérdidas mientras el agua está almacenada, lo que supone una simplificación. Hay que definir tanto el estado inicial como el estado final del embalse de bombeo.

Además, la ecuación del balance de potencias (10) debe incluir la potencia de bombeo y se debe incluir también su contribución a la reserva, quedando de la siguiente manera:

$$\sum_{i}^{N} P_{i,t} + P_{G,t} - P_{B,t} = P_{D,t} \qquad \forall t$$

$$\sum_{i}^{N} u_{i,t} P_i^{max} + P_{GB}^{max} \geq k_R P_{D,t} \qquad \forall t$$

A. Optimización con restricciones

A.1. Formulación de los problemas de optimización.

Un problema de optimización[4] consiste en la obtención de los valores de las variables para las que una función llega a su valor máximo o mínimo, cumpliendo unas determinadas condiciones o restricciones. La formulación general de un problema de optimización se realiza tal como se indica de forma general en las ecuaciones (25) - (30).

$$
\begin{aligned}
\text{opt} \quad & f(x_1, \cdots, x_n) && (25)\\
\text{s.a.} \quad & w_1(x_1, \cdots, x_n) = 0 && (26)\\
& \cdots \\
& w_n(x_1, \cdots, x_n) = 0 && (27)\\
& g_1(x_1, \cdots, x_n) \leq 0 && (28)\\
& \cdots \\
& g_n(x_1, \cdots, x_n) \leq 0 && (29)\\
& (x_1, \cdots, x_n) \in S && (30)
\end{aligned}
$$

La ecuación (25) indica que se quiere hallar el valor **óptimo** de la función f, que se denomina **función objetivo**. Esta es una función de n variables $(x_1, \cdots, x_n)$. El óptimo puede ser el valor mínimo o máximo de la función objetivo. Dado que el máximo de una función es el mínimo de la función cambiada de signo, es indiferente plantear el problema de optimización como uno de maximización o de minimización de una función. Normalmente los problemas de optimización se formulan como problemas de minimización, por lo que la mayor parte de las veces también aquí se plantearán así.

Las ecuaciones (27) - (28) se denominan **restricciones de igualdad** y son condiciones que tienen que cumplir distintas combinaciones, o funciones w, de variables. Las restricciones (29) - (30) son **restricciones de desigualdad**, que son otro tipo de condiciones que tienen que cumplir determinadas combinaciones, o funciones g, de las variables. Obsérvese que el término de la derecha del signo de igualdad o desigualdad es cero en las ecuaciones. Es evidente que cualquier restricción de este tipo se puede formular de esta manera.

Finalmente, los valores de las variables tienen que estar acotados (tienen que ser positivos, por ejemplo) o cumplir unas determinadas condiciones (poder valer solo 0 ó 1, por ejemplo). Esto se formula en la ecuación (30) como una condición de que los valores estén incluidos en un determinado conjunto S.

El conjunto de restricciones suele venir precedido del encabezamiento *s.a.*, que significa "sujeto a".

En función de cómo sean las funciones f, w y g, así se definen los problemas de optimización. Si las funciones son todas lineales, el problema de optimización será lineal. Si hay alguna función no lineal, el problema será no lineal. Si alguna variable es binaria o, en general, un número entero (por ejemplo, número de camiones necesario para transportar una cantidad de mercancía), se trata de un problema entero. Los problemas lineales con variables continuas son los problemas en principio más sencillos de resolver, en tanto que los problemas no lineales con variables enteras son los de más difícil resolución, aunque esto depende del tipo de problema y de su dimensión. La resolución de problemas no lineales enteros de gran dimensión puede requerir de complejas técnicas matemáticas fuera del alcance de este tema.

Un caso de especial interés en el tema es el de problemas de optimización no lineales, en los que las funciones son cuadráticas. Estos problemas tienen mucha aplicación en sistemas eléctricos y se les dedicará una atención especial en los apartados siguientes.

A.2. Condiciones necesarias y suficientes de optimalidad.

Sea el siguiente problema de optimización, en el que se incluyen restricciones de igualdad y desigualdad.

[4]Para ampliar el contenido de este apéndice se puede consultar A.J. Wood, B.F. Wollenberg, and G.B. Sheblé. Power Generation, Operation and Control. John Wiley amd Sons, Hoboken, NJ, 2014.

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\
\text{s.a.} \quad & w_i(\mathbf{x}) = 0 \quad i = 1, \ldots, N_w \\
& g_j(\mathbf{x})\ leq0 \quad j = 1, \ldots, N_g
\end{aligned}
$$

en donde $\mathbf{x}$ es una variable vectorial de dimensión N, w_i es una restricción de igualdad, de las que hay un número N_w, y g_j es una de las N_g restricciones de desigualdad.

Estos problemas no son resolubles de forma analítica, sino que se tiene que encontrar la solución mediante métodos iterativos. Sin embargo, se puede determinar si la solución obtenida es el óptimo. Para ello se debe formar la denominada **función lagrangiana** de la manera siguiente.

$$
\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_w} \lambda_i w_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{N_g} \mu_j g_j(\mathbf{x})
$$

Como se ve, esta función consta de la suma de tres tipos de términos: la función objetivo, las restricciones de igualdad multiplicadas cada una de ellas por un término λ_i, y las restricciones de desigualdad, multiplicadas por un término μ_j. Estos términos λ_i y μ_j se denominan **multiplicadores de Lagrange** y su valor proporciona información muy útil.

Las condiciones necesarias y suficientes que tiene que cumplir la solución $(\mathbf{x}^o, \lambda^o, \mu^o)$ se denominan **condiciones de Kuhn-Tucker**, y son las siguientes:

$$
\begin{array}{lll}
1. & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\mathbf{x}^o, \lambda^o, \mu^o) = 0 & i = 1, \ldots, N \\
2. & w_j(\mathbf{x}^o) = 0 & j = 1, \ldots, N_w \\
3. & g_k(\mathbf{x}^o) \leq 0 & k = 1, \ldots, N_g \\
4. & \mu_k^o g_k(\mathbf{x}^o) = 0 & k = 1, \ldots, N_g \\
 & \mu_k^o \geq 0 &
\end{array}
$$

De estas condiciones, la ecuación 1. es la igualdad a cero del gradiente de la lagrangiana con respecto a las variables deoptimización. Las condiciones 2. y 3. son las propias restricciones de igualdad y desigualdad. La condición 4. establece que, o bien cada una de las restricciones de desigualdad son iguales a cero, o bien lo es el multiplicador de Lagrange μ asociado a ella. Además, el valor de todos los multiplicadores de Lagrange μ asociados a restricciones de desigualdad deben ser no negativos.

Obsérvese que en el óptimo, cuando se cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker, la función lagrangiana tiene el mismo valor que la función objetivo. En efecto, en el punto óptimo la restricción de igualdad debe cumplirse y por tanto este término tendrá un valor nulo. El termino de la lagrangiana relativo a las restricciones de desigualdad también es nulo, pues según la cuarta condición de Kuhn-Tucker, o bien el multiplicador de Lagrange es nulo, o bien lo es el valor de la restricción de desigualdad.

Con el fin de explicar el significado de los multiplicadores de Lagrange se van a formular las restricciones de igualdad y desigualdad de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
w_i(\mathbf{x}) &= w_i'(\mathbf{x}) - K_{wi} = 0 \\
g_j(\mathbf{x}) &= g_j'(\mathbf{x}) - K_{gj} = 0
\end{aligned}
$$

donde K_{wi} y K_{gj} son constantes. La expresión de la función lagrangiana toma la forma:

$$
\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_w} \lambda_i \left(K_{wi} - w_i'(\mathbf{x})\right) + \sum_{j=1}^{N_g} \mu_j \left(g_j'(\mathbf{x}) - K_{gj}\right)
$$

Si se deriva la función lagrangiana con respecto a las constantes K_{wi} y K_{gi} se llega a:

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{wi}} = \lambda_i \qquad i = 1, \ldots, N_w
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{gj}} = -\mu_j \quad j = 1, \ldots, N_g
$$

Es decir, que el multiplicador λ_i es la sensibilidad de la función lagrangiana (y, en el punto óptimo, de la función objetivo) con respecto a la constante de la restricción de igualdad: un valor mayor de K_{wi}

aumentará el valor de la función objetivo. Análogamente, el multiplicador μ_j es la sensibilidad de la función objetivo con respecto a K_{gj}: un mayor valor de K_{gj} conducirá a una disminución de la función objetivo. Obsérvese que el signo de esta sensibilidad depende de la formulación empleada.

No existe un método analítico general para obtener una solución que cumpla estas condiciones. En el ejemplo siguiente, basado en el apartado anterior, se procederá por tanteo, explorando diferentes posibles soluciones del problema de optimización, y comprobando después que se cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker.

Para ilustrar esta introducción se muestra la resolución de un ejemplo de optimización sencillo. Sea el problema de optimización siguiente:

$$\begin{array}{ll} & \min_{x_1,x_2} f(x_1,x_2) \\ & f(x_1,x_2) = 5x_1^2 + 3x_2^2 \\ \text{s.a.} & w(x_1,x_2) = 7 - x_1 - x_2 = 0 \\ & g(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2 - 8 \leq 0 \end{array}$$

Se desean obtener los valores óptimos de las variables de optimización y de los multiplicadores de Lagrange.

Para ello, a partir de las ecuaciones del problema se forma la función Lagrangiana.

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,\lambda,\mu) = f(x_1,x_2) + \lambda w(x_1,x_2) + \mu g(x_1,x_2) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + \lambda(7 - x_1 - x_2) + \mu(2x_1 + x_2 - 8)$$

En este problema las condiciones de Kuhn-Tucker se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} 1. & 10x_1 - \lambda + 2\mu = 0 \\ & 6x_2 - \lambda + \mu = 0 \\ 2. & 7 - x_1 - x_2 = 0 \\ 3. & 2x_1 + x_2 - 8 \leq 0 \\ 4. & \mu(2x_1 + x_2 - 8) = 0 \\ & \mu \geq 0 \end{array}$$

Para resolver el problema se debe proceder por tanteo. En primer lugar se supone que $\mu = 0$, y se verifica si la solución resultante de esta hipótesis cumple las condiciones de Kuhn-Tucker, es decir, si cumple las condiciones necesarias y suficientes de optimalidad. En este caso se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} 10x_1 & = & \lambda \\ 6x_2 & = & \lambda \\ x_1 + x_2 & = & 7 \end{array}$$

La solución de este sistema es $x_1 = 2{,}625$, $x_2 = 4{,}375$. Se verifica si la solución cumple con la restricción de desigualdad:

$$2x_1 + x_2 = 2 \cdot 2,625 + 4,375 = 9,625 > 8$$

es decir, que no cumple con la restricción de desigualdad y no es una solución posible.

Por tanto, se sigue con el tanteo y se considera que $\mu > 0$. Según la condición 4. de Kuhn-Tucker, la restricción de desigualdad debe igualarse a cero. Para hallar la solución en este caso se resuelve el sistema de ecuaciones formado por la restricción de igualdad, y la de desigualdad igualada a cero.

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 & = & 8 \\ x_1 + x_2 & = & 7 \end{array}$$

cuya solución es $x_1 = 1$ y $x_2 = 6$.

Para hallar los multiplicadores se plantea el siguiente sistema de ecuaciones a partir de las dos primeras condiciones de Kuhn-Tucker, en las que se sustituye el valor obtenido de x_1 y x_2.

$$\begin{aligned} 10x_1 - \lambda + 2\mu &= 0 \\ 6x_2 - \lambda + \mu &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es $\lambda = 62$ y $\mu = 26$. El valor de la función objetivo es $f(x_1, x_2) = 5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 6^2 = 113$.

Para verificar el significado de los multiplicadores de Lagrange, se aumenta, en primer lugar el término constante de la restricción de igualdad en una cantidad de 0,01, con lo que la solución varía de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 8 \\ x_1 + x_2 &= 7,01 \end{aligned}$$

para la que $x_1 = 0{,}99$ y $x_2 = 6{,}02$. El valor de la función objetivo en este caso es $f(x_1, x_2) = 5 \cdot 0,99^2 + 3 \cdot 6,02^2 = 113{,}6217$. La relación entre el cambio de la función objetivo y el del incremento en el término constante es:

$$\frac{113,6217 - 113}{0,01} \approx \lambda$$

Del mismo modo, si se aumenta en la misma cantidad el término independiente de la restricción de desigualdad, la solución varía de la forma siguiente

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 8,01 \\ x_1 + x_2 &= 7 \end{aligned}$$

y $x_1 = 1{,}01$ y $x_2 = 5{,}99$. La función objetivo toma el valor de $f(x_1, x_2) = 5 \cdot 1,01^2 + 3 \cdot 5,99^2 = 112{,}7408$. El incremento relativo toma el valor:

$$\frac{112,7408 - 113}{0,01} \approx -\mu$$

Si el incremento elegido es menor, el resultado se aproximaría más a los multiplicadores de Lagrange.