Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Ingeniería Eléctrica.

Julio Usaola García.

Regulación de sistemas eléctricos.

Tema 2. Problemas.

Problema 1. Despacho económico sin pérdidas de tres centrales térmicas.

Un sistema eléctrico demanda una potencia $P_d = 850$ MW, y está abastecido por tres centrales, cuyos costes horarios son:

$$\begin{aligned} F_1(P_{g1}) &= 459 + 6,48P_{g1} + 0,00128P_{g1}^2 \text{ (R/h)} \\ F_2(P_{g2}) &= 310 + 7,85P_{g2} + 0,00194P_{g2}^2 \text{ (R/h)} \\ F_3(P_{g3}) &= 78 + 7,97P_{g3} + 0,00482P_{g3}^2 \text{ (R/h)} \end{aligned}$$

Los límites de funcionamiento de las centrales son:

$$\begin{aligned} 150 \leq P_{g1} \leq 600 &\quad \text{(MW)} \\ 100 \leq P_{g2} \leq 400 &\quad \text{(MW)} \\ 50 \leq P_{g3} \leq 200 &\quad \text{(MW)} \end{aligned}$$

Obténgase la producción de cada central para que los costes de funcionamiento del sistema sean mínimos.

Solución
El planteamiento del problema de optimización para este problema sería el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \frac{1}{2}2,56 \cdot 10^{-3}P_{g1}^2 + 6,48P_{g1} + \frac{1}{2}3,88 \cdot 10^{-3}P_{g2}^2 + 7,85P_{g2} + \frac{1}{2}9,64 \cdot 10^{-3}P_{g3}^2 + 7,97P_{g3} \\ \text{s.a.} & P_{g1} + P_{g2} + P_{g3} = 850 \\ & 150 \leq P_{g1} \leq 600 \\ & 100 \leq P_{g2} \leq 400 \\ & 50 \leq P_{g3} \leq 200 \end{array}$$

La resolución del problema se abordará, no por resolución directa del problema de optimización, sino a partir del principio de que el funcionamiento óptimo se produce cuando los costes marginales de las tres centrales son iguales. El punto óptimo de funcionamiento se calculará, por tanto, igualando estos costes marginales, es decir:

$$\begin{aligned} \lambda &= 6,48 + 0,00256P_{g1} \\ \lambda &= 7,85 + 0,00388P_{g2} \\ \lambda &= 7,97 + 0,00964P_{g3} \end{aligned}$$

se despejan las potencias en función de λ, y se suman para que todas ellas den la potencia demandada. Esto lleva a la ecuación siguiente:

$$\frac{\lambda - 6,48}{0,00256} + \frac{\lambda - 7,85}{0,00588} + \frac{\lambda - 7,97}{0,00964} = 850$$

de esta ecuación se obtiene el valor de $\lambda = 8{,}28$ R/MWh. Para este coste marginal, las potencias de las centrales son:

$$
\begin{aligned}
P_{g1} &= 705,5 \text{ MW} \\
P_{g2} &= 112,46 \text{ MW} \\
P_{g3} &= 32,69 \text{ MW}
\end{aligned}
$$

Las potencias asignadas a las centrales 1 y 3 están fuera de los límites admisibles, por lo que se les asigna la potencia máxima y la mínima, respectivamente, para tantear si esta es la solución del problema. De esta forma, cada central funcionará con un coste marginal diferente. Las potencias que generaría cada central, junto con el coste marginal de cada una de ellas sería, en estas condiciones:

Central	P_g (MW)	λ (R/MWh)
1	600	8,016
2	200	8,626
3	50	8,452

Estos resultados indican que se podría bajar la producción de la central 2, y subir en la misma cantidad la producción en la central 3, puesto que de esta forma se reduciría el coste de funcionamiento. Esta reasignación de generación entre las dos centrales se puede hacer hasta que los costes marginales de las centrales sean iguales. La potencia asignada a cada una de ellas se obtendrá de la resolución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
7,85 + 0,00388 P_{g2} &= 7,97 + 0,00964 P_{g3} \\
P_{g2} + P_{g3} &= 250
\end{aligned}
$$

lo que finalmente resulta en la asignación de potencia siguiente:

Central	P_g (MW)	λ (R/MWh)	μ^+ (R/MWh)	μ^- (R/MWh)
1	600	8,016	0,560	0
2	187,13	8,576	0	0
3	62,87	8,576	0	0

Aunque los costes marginales de las tres centrales no sean iguales, no se puede aumentar la producción de la central más barata (la 1) a costa de las más caras (la 2 y la 3) puesto que la central 1 está en su valor máximo.

En la tabla también aparecen los valores de los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones de desigualdad (μ^+ y μ^-), que solo tienen un valor no nulo cuando la potencia de la central está en su límite. En este caso, solo la central 1 está en su límite superior, por lo que solo el valor asociado a la restricción de desigualdad relativa a su límite superior de potencia (μ^+) tiene un valor no nulo. Este valor es la diferencia entre el coste marginal del sistema y el coste marginal de la central (8,576 - 8,016 = 0,560 R/MWh).

Problema 2. Despacho económico con pérdidas.

Un sistema eléctrico demanda una potencia $P_d = 850$ MW, y está abastecido por tres centrales, cuyos costes horarios son:

$$
\begin{aligned}
F_1(P_{g1}) &= 561 + 7,92P_1 + 0,001562P_1^2 \text{ (R/h)} \\
F_2(P_{g2}) &= 310 + 7,85P_2 + 0,001940P_2^2 \text{ (R/h)} \\
F_3(P_{g3}) &= 78 + 7,97P_3 + 0,004820P_3^2 \text{ (R/h)}
\end{aligned}
$$

Los límites de funcionamiento de las centrales son:

$$
\begin{aligned}
150 \leq P_1 \leq 600 &\quad \text{(MW)} \\
100 \leq P_2 \leq 400 &\quad \text{(MW)} \\
50 \leq P_3 \leq 200 &\quad \text{(MW)}
\end{aligned}
$$

Obténgase la producción de cada central para que los costes de funcionamiento del sistema sean mínimos. Las pérdidas del sistema vienen dadas por la expresión siguiente:

$$P_l = 3 \cdot 10^{-5} P_1^2 + 9 \cdot 10^{-5} P_2^2 + 1,2 \cdot 10^{-4} P_3^2$$

Solución

Las condiciones de despacho óptimo, sin tener en cuenta las restricciones de desigualdad, vienen dadas por las ecuaciones siguientes, que son el resultado de igualar a cero el gradiente de la lagrangiana:

$$
\begin{aligned}
7,92 + 0,003124P_1 &= \lambda(1 - 2 \cdot 3 \cdot 10^{-5} P_1) \qquad (1) \\
7,85 + 0,003880P_2 &= \lambda(1 - 2 \cdot 9 \cdot 10^{-5} P_2) \\
7,97 + 0,009640P_3 &= \lambda(1 - 2 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} P_3) \\
P_1 + P_2 + P_3 &= 850 + 3 \cdot 10^{-5} P_1^2 + 9 \cdot 10^{-5} P_2^2 + 1,2 \cdot 10^{-4} P_3^2
\end{aligned}
$$

que es un sistema de ecuaciones no lineales, cuya solución numérica debe obtenerse mediante un método iterativo. En este problema se utilizará el método de *punto fijo*.

Paso 1. El método debe partir de una estimación inicial de la solución. Se tomará como estimación tres valores que satisfacen la demanda sin pérdidas[1]

$$P_1 = 400 \text{ MW} \quad P_2 = 300 \text{ MW} \quad P_3 = 150 \text{ MW}$$

Paso 2. Para estos valores de generación, se obtienen las pérdidas, y las pérdidas incrementales (PI), que son las derivadas de las pérdidas con respecto a cada potencia inyectada. Los valores obtenidos son:

$$P_l = 3 \cdot 10^{-5} 400^2 + 9 \cdot 10^{-5} 300^2 + 1,2 \cdot 10^{-4} 150^2 = 15,6 \text{ MW}$$

$$PI_1 = 2 \cdot 3 \cdot 10^{-5} \cdot 400 = 0,0240 \quad ; \quad PI_2 = 2 \cdot 9 \cdot 10^{-5} \cdot 300 = 0,0540 \quad ; \quad PI_3 = 2 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 150 = 0,0360$$

Paso 3. Con estos valores se plantea el sistema de ecuaciones **??**, que ahora ya es lineal.

$$
\begin{aligned}
7,92 + 0,003124P_1 &= \lambda(1 - 0,0240) \\
7,85 + 0,003880P_2 &= \lambda(1 - 0,0540) \\
7,97 + 0,009640P_3 &= \lambda(1 - 0,0360) \\
P_1 + P_2 + P_3 &= 850 + 15,6
\end{aligned}
$$

cuya solución es:

[1] Otra estimación posible podría ser el resultado de un despacho económico sin pérdidas.

$$P_1 = 440,68 \text{ MW} \quad P_2 = 299,12 \text{ MW} \quad P_3 = 125,77 \text{ MW} \quad \lambda = 9,5252 \text{ R/MWh}$$

Esta solución difiere de la estimación inicial, por lo que las pérdidas y pérdidas incrementales no son las correctas. En consecuencia, hay que realizar otra iteración, que consiste en repetir el proceso a partir del Paso 2, con los nuevos valores de potencia obtenidos. El proceso deberá concluir hasta que la diferencia entre dos iteraciones consecutivas sea despreciable.

Los resultados de las iteraciones del proceso se muestran en la tabla **??**. El último resultado puede considerarse la solución numérica del problema.

Iteración	P_1 (MW)	P_2 (MW)	P_3 (MW)	P_l (MW)	λ (R/MWh)
0	400	300	150	15,6	9,5252
1	440,68	299,12	125,77	15,78	9,5275
2	433,94	300,11	131,74	15,84	9,5285
3	435,87	299,94	130,42	15,83	9,5283
4	435,13	299,99	130,71	15,83	9,5284

Tabla 1: Resultados del problema **??**

El método de punto fijo es de gran simplicidad, pero puede presentar problemas de convergencia, de forma que no se alcance la solución.

Problema 3. Flujo de potencia óptimo en corriente continua.

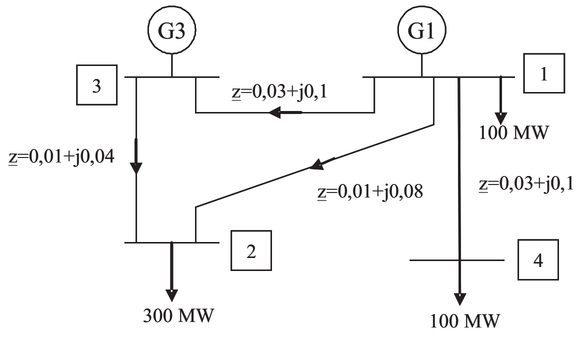

Figura 1: Sistema del problema ??.

En el circuito de la figura, los costes de las centrales son:

$$F_1(P_{g1}) = 561 + 8P_{g1} + 0,05P_{g1}^2 \quad (R/h) \quad 150 \leq P_{g1} \leq 600\ MW$$
$$F_{g3}(P_{g3}) = 310 + 7P_{g3} + 0,07P_{g3}^2 \quad (R/h) \quad 100 \leq P_{g3} \leq 400\ MW$$

La potencia máxima que puede circular por las líneas es de 200 MW. Plantéense las ecuaciones del flujo de potencia óptimo empleando las ecuaciones del flujo de potencia en continua, y obténganse los valores de las potencias generadas por las centrales que minimizan el coste total de operación del sistema teniendo en cuenta las restricciones.

NOTA: Tómese como potencia base $S_b = 100$ MW. El nudo oscilante es el 3.

Solución

En primer lugar, se va a verificar si alguna restricción de desigualdad está activa. Para ello, se realiza un despacho económico (sin pérdidas, puesto que se deben emplear las ecuaciones del flujo de potencia en continua), y se verifica si se viola alguna de estas restricciones.

El despacho económico implica la resolución de las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} 8 + 0,1P_{g1} &= 7 + 0,14P_{g3} \\ P_{g1} + P_{g3} &= 500 \end{aligned}$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned} P_{g1} &= 287,5 \text{ MW} \\ P_{g3} &= 212,5 \text{ MW} \\ \lambda &= 36,75 \text{ R/MWh} \end{aligned}$$

Ambas potencias están dentro de los límites de generación de las centrales. A partir de esta solución se obtienen las potencias circulantes por las líneas. Se tendrá en cuenta que por la línea 1-4 circulan 100 MW (menos que el límite admisible), y estos 100 MW podrán añadirse a la potencia demandada en el nudo 1. Por tanto, se realiza el flujo de potencia en continua para un sistema con tres nudos.

Para ello es necesario resolver el sistema siguiente, en el que las potencias se han pasado a magnitudes unitarias:

$$\begin{bmatrix} 22,5 & -12,5 \\ -12,5 & 37,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,875 \\ -3 \end{bmatrix}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -6,818 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ \delta_2 &= -0,0823 \text{ rad} \end{aligned}$$

A partir de estos valores se obtienen las potencias circulantes por las líneas.

$$
\begin{aligned}
p_{31} &= 10(6,818 \cdot 10^{-3}) = 0,06818 \text{ p.u.} \\
p_{32} &= 25(0,0823) = 2,0575 \text{ p.u.} > p_{max} \\
p_{12} &= 12,5(-6,818 \cdot 10^{-3} + 0,0823) = 0,943 \text{ p.u.}
\end{aligned}
$$

por tanto la potencia por la línea 32 excede la potencia máxima admisible, y por tanto habrá que resolver el problema de flujo de potencia óptimo en continua para obtener la mejor combinación posible.

El problema de optimización que hay que resolver se indica a continuación:

$$
\text{mín}_{p_{gi}}\, 8 \cdot 100 p_{g1} + 0,05 \cdot 100^2 p_{g1}^2 + 7 \cdot 100 p_{g3} + 0,07 \cdot 100^2 p_{g3}^2
$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.a.}\quad & 22,5\delta_1 - 12,5\delta_2 = p_{g1} - 2 \\
& -12,5\delta_1 + 37,5\delta_2 = -3 \\
& -10\delta_1 - 25\delta_2 = p_{g3} \\
& -25\delta_2 \leq 2 \\
& 25\delta_2 \leq 2 \\
& -10\delta_1 \leq 2 \\
& 10\delta_1 \leq 2 \\
& 12,5(\delta_1 - \delta_2) \leq 2 \\
& -12,5(\delta_1 - \delta_2) \leq 2
\end{aligned}
$$

El problema consiste en la minimización de costes de funcionamiento del sistema, con las restricciones de igualdad de potencia inyectada por nudo, y la máxima potencia circulante por cada rama.

La función lagrangiana correspondiente a este problema de optimización es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= (8 \cdot 100 p_{g1} + 0,05 \cdot 100^2 p_{g1}^2 + 7 \cdot 100 p_{g3} + 0,07 \cdot 100^2 p_{g3}^2) + \\
&+ \lambda_1(22,5\delta_1 - 12,5\delta_2 - p_{g1} + 2) \cdot 100 + \\
&+ \lambda_2(-12,5\delta_1 + 37,5\delta_2 + 3) \cdot 100 + \\
&+ \lambda_3(-10\delta_1 - 25\delta_2 - p_{g3}) \cdot 100 + \\
&+ \mu_{32}^{+}(-25\delta_2 - 2) \cdot 100 + \mu_{32}^{-}(25\delta_2 - 2) \cdot 100 + \\
&+ \mu_{31}^{+}(-10\delta_1 - 2) \cdot 100 + \mu_{31}^{-}(10\delta_1 - 2) \cdot 100 + \\
&+ \mu_{12}^{+}(12,5(\delta_1 - \delta_2) - 2) \cdot 100 + \mu_{12}^{-}(-12,5(\delta_1 - \delta_2) - 2) \cdot 100
\end{aligned}
$$

en la que se han incluido los multiplicadores de Lagrange correspondientes a las restricciones de igualdad (λ_j) y a las de desigualdad correspondientes al límite superior, o positivo para el sentido de circulación elegido, (μ_{ij}^{+}) e inferior (μ_{ij}^{-}). Se han multiplicado las restricciones por la potencia base, 100 MW, (sin que esto altere el problema) con el fin de obtener en R/MWh los valores de los costes incrementales de los nudos y los de los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones de desigualdad.

Se va a resolver el problema considerando activa únicamente la restricción de desigualdad correspondiente a la línea 3-2, en la que se sobrepasaba el límite máximo en el caso anterior. Por tanto se considerará que los multiplicadores de Lagrange de las restricciones de desigualdad son nulos, a excepción de μ_{32}^{+}.

Para obtener la solución, se iguala a cero el gradiente de la lagrangiana, llegándose a las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{g1}} &= 8 + 0,1 \cdot 100 p_{g1} = \lambda_1 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{g3}} &= 7 + 0,14 \cdot 100 p_{g3} = \lambda_3 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta_1} &= 22,5\lambda_1 - 12,5\lambda_2 - 10\lambda_3 = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta_2} &= -12,5\lambda_1 + 37,5\lambda_2 - 25\lambda_3 - 25\mu_{32}^{+} = 0 \\
& 22,5\delta_1 - 12,5\delta_2 = p_{g1} - 2 \\
& -12,5\delta_1 + 37,5\delta_2 = -3 \\
& -10\delta_1 - 25\delta_2 = p_{g3} \\
& -25\delta_2 = 2
\end{aligned}
$$

A partir de la última ecuación se obtiene que $\delta_2 = -0,08$ rad. Y de este valor y del resto de las ecuaciones se obtiene de forma inmediata la solución. Se puede verificar que se cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker.

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= 0 \text{ rad} \\
\delta_2 &= -0,08 \text{ rad} \\
P_{g1} &= 300 \text{ MW} \\
P_{g3} &= 200 \text{ MW} \\
\lambda_1 &= 38 \text{ R/MWh} \\
\lambda_2 &= 40,4 \text{ R/MWh} \\
\lambda_3 &= 35 \text{ R/MWh} \\
\mu_{32}^{+} &= 6,6 \text{ R/MWh}
\end{aligned}$$

En la solución hay un coste incremental distinto por cada nudo, y la potencia generada por cada una de las centrales ha cambiado con respecto a la solución sin restricciones.

Problema 4. Programación de la generación por el método de programación dinámica [2].

Sea un sistema eléctrico con tres centrales cuyos costes horarios de funcionamiento tienen la siguiente expresión, en la que P está en MW:

$$f(P) = c + b \cdot P + a \cdot P^2 \text{ (R/h)}$$

Los parámetros a, b y c de las centrales y sus costes de puesta en marcha y parada vienen dadas en la tabla siguiente.

Central	P_{min} (MW)	P_{max} (MW)	c (R/h)	b (R/MWh)	a (R/MW^{2}h)	C. arranque (R)	C. parada (R)
1	100	600	50	6	0,002	1000	900
2	100	400	50	8	0,0025	500	400
3	50	200	10	10	0,005	0	0

Estas centrales deben abastecer una demanda que se prevé que tenga la siguiente evolución a lo largo de un día:

Intervalo	1	2	3	4	5	6
Hora	1-4	5-8	9-12	13-16	16-20	21-24
P_d (MW)	170	520	800	700	900	330

En el último intervalo del período anterior están conectadas solo las centrales 1 y 3. No se consideran las pérdidas, ni las restricciones de red, y se supondrá que las centrales siempre estarán disponibles.

Calcúlese la asignación de generación óptima para el día de acuerdo con los datos proporcionados utilizando el método de programación dinámica.

Solución.

La programación dinámica es una técnica de optimización que permite obtener las etapas intermedias de una trayectoria óptima entre dos puntos. En el caso de la programación de la generación, los dos puntos, origen y destino, son la situación de las centrales (estado de conexión/desconexión y potencia generada) al principio y al final de un día. Las etapas intermedias son los estados de las centrales (conexión/desconexión y potencia generada de cada central) en cada uno de los intervalos temporales de ese día y se trata de obtener la trayectoria de coste mínimo. Para obtener la trayectoria óptima se emplea el llamado *Teorema de optimalidad*, según el cual una estrategia óptima contiene solo estrategias subóptimas. En la resolución del problema se considerarán las simplificaciones siguientes:

- Las únicas restricciones de desigualdad que se incluyen son las de potencia máxima y mínima de las centrales.
- Los costes de arranque son fijos, y no dependen del tiempo que la central haya estado conectada.
- No se consideran las restricciones de red.

La resolución del problema mediante el método de programación dinámica se debe efectuar en varios pasos. En primer lugar, hay que determinar las combinaciones de centrales posibles y factibles, de entre las que se escogerán las combinaciones óptimas para cada nivel de demanda, teniendo en cuenta la evolución de esta última. Estas combinaciones se muestran en la Tabla **??** siguiente, en la que se ha excluido la combinación de todas las centrales desconectadas (combinación 000). Las centrales conectadas se indican mediante un 1 y las desconectadas con un 0, en el orden dado en el enunciado. Para los estados factibles se realiza un despacho económico (sin pérdidas, puesto que estas no se consideran) y se obtienen los costes de funcionamiento para cada combinación factible de centrales y nivel de demanda. En el cuadro **??** se muestran los costes de funcionamiento de los estados factibles y se señalan mediante una 'x' los estados que son infactibles para un nivel dado de demanda, es decir, que la demanda de ese intervalo está fuera de los límites de potencia máximo y mínimo que esa combinación puede proporcionar. Los costes de funcionamiento se indican para las cuatro horas del intervalo.

El procedimiento para obtener la asignación óptima de generación se sintetiza en la Tabla **??**, que se explica a continuación. En el cuadro, las siglas significan:

E.A.: *Estado Anterior*

C.A.: *Costes Agregados*

[2] Este problema requiere una ampliación de los contenidos teóricos, pero se proporciona suficiente información para su resolución. Se puede consultar la referencia A.J. Wood, B.F. Wollenberg, and G.B. Sheblé. Power Generation, Operation and Control. John Wiley amd Sons, Hoboken, NJ, 2014.

				P_d	(MW)				
Estado	Combinación	P_{min} (MW)	P_{max} (MW)	170	520	800	700	900	330
8	111	250	1200	x	16207	25943	22370	28305	10369
7	110	200	1000	x	15191	24400	27240	27911	9643
6	101	150	800	5285	15337	24790	21270	x	9637
5	100	100	600	4511	14843	x	x	x	8991
4	011	150	600	8991	19728	x	x	x	12034
3	010	100	400	5929	x	x	x	x	11849
2	001	50	200	7418	x	x	x	x	x

Tabla 2: Combinaciones posibles de centrales del problema **??**. Resultados en unidades monetarias R.

C.F.: Costes de Funcionamiento.

Los costes de funcionamiento son los mismos que aparecen en la Tabla **??**, es decir, son los costes de la producción de las centrales según un despacho económico óptimo de una determinada combinación de centrales para una demanda dada. Los costes agregados son los costes de las centrales hasta ese momento del día, suponiendo que el estado anterior es el indicado en la columna E.A. Los costes acumulados incluyen los costes de funcionamiento de los estados previos y los costes de transición (puesta en marcha y parada) entre dos estados y dos niveles de demanda.

Por ejemplo, los costes agregados en el intervalo 4 (demanda igual a 700 MW) para la combinación 8 (111 - todas las centrales conectadas), suponiendo que el estado anterior es el número 6 toman el valor de 67014 R. Este valor se ha obtenido de la siguiente manera:

$$67014 = 22370 + 44144 + 500$$

en donde 22370 R son los costes de funcionamiento del estado 8 cuando suministra una demanda de 700 MW. 500 R son los costes de puesta en marcha de la central 2, que es la transición necesaria para pasar del estado 6 (101) al 8 (111). 44144 R son los costes agregados al final del intervalo 3 (demanda de 800 MW) para la combinación 6, que se obiene como el mínimo de todos los costes agregados a partir de todos los estados posibles del intervalo anterior, esto es, min(47182, 45392, 44638, 44144, 51429). Esto último es la aplicación del principio de optimalidad, según el cual una trayectoria óptima solo contiene subtrayectorias óptimas. Así pues, se eliminan todas aquellas trayectorias (estados previos) que dan lugar a costes acumulados más altos. De esta manera se elimina el cálculo innecesario de muchas trayectorias. Los mínimos costes acumulados para cada estado e intervalo están recuadrados en el cuadro de la solución.

Al final del día se comprueba qué estado tiene unos costes agregados menores. En este problema es el estado 5, con unos costes finales de 103217 R. Estos son los costes mínimos de suministrar la demanda de este día. A la izquierda de esta cantidad, en el cuadro, se indica el estado del que proviene en el intervalo anterior, que es el estado 7 (110). En el intervalo anterior, los costes acumulados mínimos son de 93826 R, que corresponden al estado 6 del intervalo anterior. Procediendo de igual manera hasta el inicio del día, se llega al conjunto de combinaciones óptimas de centrales que abastecerán la demanda en los sucesivos intervalos. El resumen de resultados se muestra en la Tabla **??**.

En la Tabla **??** se señala con un asterisco el valor del coste de funcionamiento mínimo de las combinaciones factibles para cada valor de demanda. Se puede comprobar que la combinación óptima (en la Tabla **??**) coincide con la combinación de menor coste de funcionamiento en cada intervalo, excepto en el intervalo 3. La razón es que los costes de puesta en marcha de la central 2 (presente en el estado 7) son superiores a los de la central 3 (presente en el estado 6), por lo que es preferible este último, a pesar de que la central 3 es una central más cara que la central 2. Esto muestra que la elección de los estados con mínimos costes de funcionamiento no tiene por qué ser la óptima, y de ahí la necesidad de optimizar para un período dado (normalmente un día) conjuntamente. Esto además tiene influencia cuando se consideran otros aspectos no contemplados en el problema y que se dan en la práctica: tiempos mínimos de funcionamiento o parada, costes de arranque variables con el tiempo o restricciones de otro tipo.

		Intervalo 1 P_d =170 MW			Intervalo 2 P_d=520 MW			Intervalo 3 P_d = 800 MW			Intervalo 4 P_d = 700 MW			Intervalo 5 P_d = 900 MW			Intervalo 6 P_d = 330 MW		
Est.	Comb.	E.A.	C.A.	C.F.	E.A.	C.A.	C.F.	E.A.	C.A.	C.F.	E.A.	C.A.	C.F.	E.A.	C.A.	C.F.	E.A.	C.A.	C.F.
8	111				6	21992	16207	8	47935	25943	8	68516	22370	8	94929	28305	8	104589	10369
					5	22218		7	46146		7	66624		7	99799		7	104195	
					4	24881		6	46292		6	67014		6	94219				
					3	24536		5	46798										
					2	26025		4	52583										
7	110				6	21876	15191	8	46392	24400 *	8	73386	27240	8	94536	27911 *	8	103863	9643
					5	20202		7	44602		7	71494		7	99406		7	103469	
					4	24265		6	44748		6	71884		6	$\boxed{93826}$				
					3	23520		5	44254										
					2	25009		4	51039										
6	101	6	5285	5285	6	20622	15337	8	47182	24790	8	67816	21270 *				8	104257	9637
					5	19848		7	45392		7	65924					7	103863	
					4	24411		6	44638		6	$\boxed{65414}$							
					3	24066		5	$\boxed{44144}$										
					2	24655		4	51429										
5	100	6	$\boxed{4511}$	4511 *	6	20128	14843 *										8	103611	8991 *
					5	$\boxed{19354}$											7	$\boxed{103217}$	
					4	23917													
					3	23572													
					2	24161													
4	011	6	7674	6274	6	26413	19728										8	107153	12034
					5	25639											7	106760	
					4	27402													
					3	27057													
					2	28546													
3	010	6	7329	5929													8	106968	11849
																	7	106575	
2	001	6	8318	7418															

Tabla 3: Costes acumulados de los distintos estados en el problema **??** y solución del problema. Resultados en unidades monetarias R.

Intervalo	1	2	3	4	5	6
Demanda (MW)	170	520	800	700	900	330
Combinación óptima	100	100	101	101	110	100
Costes funcionamiento (R)	4511	14843	24790	21270	27911	8991
Costes agregados (R)	4511	19354	44144	65414	93826	103217

Tabla 4: Resultados finales del problema **??**. Resumen.

Problema 5. Problema hidráulico con especificaciones de energía.

Sea un sistema eléctrico, cuya demanda para el período de un día tiene el siguiente valor:

Intervalo	1	2	3	4	5	6
Horas	1-4	5-8	9-12	13-16	17-20	21-24
Demanda (MW)	1100	1400	1600	1800	1400	1100

Esta demanda se cubre con una central térmica y una hidráulica. Los costes marginales de la central térmica son:

$$\lambda = 0,312 P_T + 733,73 \text{ (R/MWh)}$$

y la central hidráulica tiene que producir una energía E_H=2560 MWh a lo largo de todo el día. Los límites de funcionamiento de la central térmica e hidráulica son:

$$0 \leq P_H \leq 400 \text{ MW}$$
$$500 \leq P_T \leq 1700 \text{ MW}$$

Determínese cuáles son las producciones de la central térmica e hidráulica en cada intervalo para que el coste de funcionamiento del sistema sea mínimo.

Solución

La energía demandada por el sistema durante todo el día es:

$$E_d = (2 \cdot 1100 + 2 \cdot 1400 + 1600 + 1800) \cdot 4 = 33600 \text{ MWh}$$

La potencia que tiene que suministrar la central térmica durante todo el período se obtiene de la siguiente manera:

$$P_T = \frac{E_D - E_H}{T} = \frac{33600 - 2560}{24} = 1293,33 \text{ MW}$$

a partir de este valor se obtienen las potencias que debe producir la central hidráulica en cada intervalo.

$$\begin{array}{ll} P_{H1} = \text{-193,33 MW} & P_{H4} = \text{506,67 MW} \\ P_{H2} = \text{106,67 MW} & P_{H5} = \text{106,67 MW} \\ P_{H3} = \text{306,67 MW} & P_{H6} = \text{-193,33 MW} \end{array}$$

Las potencias asignadas en los intervalos 1 y 6 están fuera de los límites de funcionamiento de la central hidráulica. Esto significa que en estos períodos esta central no puede funcionar. Por tanto, la energía que debe entregar la central deberá generarse en los intervalos 2 a 5. En este tiempo, la demanda es:

$$E_d = (2 \cdot 1400 + 1600 + 1800) \cdot 4 = 24800 \text{ MWh}$$

La aplicación de la fórmula anterior da el nuevo valor de potencia térmica.

$$P_T = \frac{24800 - 2560}{16} = 1390 \text{ MW}$$

y las potencias hidráulicas tendrán el valor

$$\begin{array}{ll} P_{H1} = 0 \text{ MW} & P_{H4} = 410 \text{ MW} \\ P_{H2} = 10 \text{ MW} & P_{H5} = 10 \text{ MW} \\ P_{H3} = 210 \text{ MW} & P_{H6} = 0 \text{ MW} \end{array}$$

Pero si la potencia máxima de la central es de 400 MW, la potencia suministrada en el intervalo 4 no cumple con esta restricción y debe ser reducida a 400 MW. Esto conlleva la modificación de las potencias que suministra la central en los intervalos restantes para que se produzca en el día la energía especificada. también en este intervalo la potencia que suministra la central térmica viene forzada, P_{T4}=1400 MW.

Para realizar el nuevo reparto, es preciso calcular la energía que la central hidráulica puede suministrar en los intervalos 2,3 y 5, así como la demanda que hay que atender en estos intervalos.

$$\begin{aligned} E_H &= 2560 - 4 \cdot 400 = 960 \text{ MWh} \\ E_d &= (1400 \cdot 2 + 1600) \cdot 4 = 17600 \text{ MWh} \end{aligned}$$

a partir de estos valores, se obtiene la potencia de la central térmica en estos intervalos, usando la fórmula (**??**).

$$P_T = \frac{17600 - 960}{12} = 1386,67 \text{ MW}$$

De este valor se obtiene la asignación final de la generación, que finalmente queda como sigue:

Intervalo	1	2	3	4	5	6
P_d (MW)	1100	1400	1600	1800	1400	1100
P_T (MW)	1100	1386,67	1386,67	1400	1386,67	1100
P_H (MW)	0	13,33	213,33	400	13,33	0

Problema 6. Gestión de una central de bombeo.

Un sistema eléctrico tiene la siguiente función de costes de su generación térmica agregada:

$$f(P_T) = 250 + 1{,}5P_T + \frac{1}{200}P_T^2 \quad \text{(R/h)} \quad 200 \leq P_T \leq 1200\text{MW}$$

Además de esta central, el sistema dispone de una central hidráulica de bombeo, con las siguientes características:

1. La central puede generar una potencia P_H entre 0 y 200 MW.
2. La central puede bombear a potencias de 100 ó 200 MW exclusivamente.
3. El rendimiento del proceso generación-bombeo es del 70 %, esto es, por cada MWh utilizado en el bombeo, se producen 0,7 MWh.
4. El embalse tiene una capacidad equivalente a 1600 MWh de generación.

La demanda del sistema en un período de un día, que se ha dividido en 6 intervalos de 4 horas es:

Intervalo	1	2	3	4	5	6
P_d (MW)	600	1000	900	500	400	500

El embalse debe estar lleno al principio del día y al final.
Determínese, de forma que los costes de funcionamiento del sistema sean mínimos:

1. La potencia que tiene que generar la central térmica en los distintos intervalos del día.
2. El programa de generación y bombeo de la central hidráulica.
3. Los costes marginales de la energía en cada intervalo.

NOTA: Aunque la potencia de bombeo deba ser 100 ó 200 MW, no es necesario que la central está horas enteras en estos niveles de potencia.

Solución.

Para poder determinar los intervalos en los que es conveniente turbinar o bombear, se calculan los costes marginales de la energía sin incluir el bombeo. Esto lleva a los siguientes valores, por intervalo:

Intervalo	P_d (MW)	P_T (MW)	λ R/MWh)	λ/η R/MWh)	P_H (MW)	P_B (MW)	$P_H - P_B$ (MW)	Coste (R)
1	600	600	7,5	10,7	0	0	0	2950
2	1000	1000	11,5	16,4	0	0	0	6750
3	900	900	10,5	15,0	0	0	0	5650
4	500	500	6,5	9,3	0	0	0	2250
5	400	400	5,5	7,9	0	0	0	1650
6	500	500	6,5	9,3	0	0	0	2250
							Total	86000

Se puede observar, aplicando la condición de rentabilidad, que será rentable bombear en los intervalos 4 a 6, y turbinar en los intervalos 2 y 3. En el intervalo 1 la central hidráulica estará en reposo. En principio podría suponerse que también podría bombearse durante el intervalo 1, y turbinar en el intervalo 2, pero, como se comprobará posteriormente, esto no resulta rentable.

La resolución del problema ser realizará en dos etapas:

1. En la primera etapa se realizará la optimización del problema conjunto supuesta continua la variable de la potencia de bombeo.
2. En la segunda etapa, se realizará el reparto de la energía de bombeo según las restricciones.

Para resolver la **primera etapa** del problema, se plantean las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} P_{TH} = \frac{E_{DH} - E_H}{T_H} & & (1) \\ \lambda_H \cdot \eta \geq \lambda_B & & (2) \\ P_{TB} = P_{Bk} + P_{dBk} & \forall k = 1, \cdots, N_B & (3) \\ P_{TH} + P_{Hk} = P_{dHk} & \forall k = 1, \cdots, N_H & (4) \\ E_H = \eta E_B & & (5) \end{array}$$

en donde los subíndices H denotan los intervalos de turbinación, y los B los de bombeo.

La ecuación (1) es la ecuación (**??**) aplicada al problema, puesto que la especificación de la central hidráulica se ha hecho en términos de potencia. Por tanto, durante los períodos de turbinación la potencia suministrada por la central térmica (P_{TH}) deberá ser constante para que el reparto sea óptimo.

La ecuación (2) establece el límite de rentabilidad: lo óptimo sería llegar a ese límite si hay suficiente capacidad en el embalse. Por tanto, en la situación óptima, los costes marginales de los intervalos de bombeo son constantes, al igual que los delos intervalos de turbinación, y relacionados por la ecuación dada.

Las ecuaciones (3) y (4) son la igualdad de generación y demanda en los intervalos de bombeo y turbinación, respectivamente; N_B es el número de intervalos en los que se bombea y N_T el número de intervalos en los que se turbina. también la rentabilidad máxima implica que la potencia de la central térmica durante los intervalos de bombeo sea constante.

La ecuación (5) es la definición del rendimiento.

A partir de estas ecuaciones se desea obtener los valores de P_{TH}, P_{TB}, E_{DH}, E_H, λ_H, λ_B, N_H y N_B.

A estas ecuaciones habrá que añadir las condiciones de desigualdad, que serían las potencias máximas y mínimas de las centrales, así como la máxima capacidad de almacenamiento de la central de bombeo.

A partir de la ecuación (2) se puede deducir que, si se llega al límite de rentabilidad:

$$P_{TB} = \eta P_{TH} - \frac{b_T(1-\eta)}{2a_T}$$

donde $b_T = 1,5$ y $a_T = 1/200$ son los coeficientes de la función de costes horarios de la central térmica.

Combinando las ecuaciones anteriores se llega a la expresión:

$$P_{TH} = \frac{E_{DH} + \eta E_{DB} + \eta T_B \frac{b_T(1-\eta)}{2a_T}}{T_H + \eta^2 T_B} \tag{2}$$

Esta fórmula se puede aplicar suponiendo, como se ha hecho, que los intervalos de bombeo son el 4, 5 y 6, y los de turbinación el 2 y el 3. Con este supuesto, los valores obtenidos son:

$$\begin{aligned} E_{DH} &= 7600 \text{ MWh} \quad & T_H &= 8 \text{ horas} \\ E_{DB} &= 5600 \text{ MWh} \quad & T_B &= 12 \text{ horas} \\ P_{TH} &= 857{,}2 \text{ MW} \end{aligned}$$

y por tanto, $P_{TB} = 555$ MW. A partir de estos valores, los resultados para cada intervalo son:

Intervalo	P_d (MW)	P_T (MW)	λ R/MWh)	λ/η R/MWh)	P_H (MW)	P_B (MW)	$P_H - P_B$ (MW)	Coste (R)
1	600	600	7,5	10,7	0	0	0	2950
2	1000	857,2	10,072	14,4	142,8	0	142,8	5209,8
3	900	857,2	10,072	14,4	42,8	0	42,8	5209,8
4	500	555	7,05	10,072	0	55	55	2623
5	400	555	7,05	10,072	0	155	155	2623
6	500	555	7,05	10,072	0	55	55	2623
							Total	84953

Sobre esta solución se pueden hacer los siguientes comentarios:

- Los costes totales del sistema se han reducido con respecto a la situación sin bombeo.
- Se ha llegado a la situación óptima, en el sentido de que no es rentable bombear 1 MWh más.
- No se ha empleado totalmente la capacidad de almacenamiento de los embalses.
- La potencia de bombeo no es 100 ó 200 MW, por lo que la central hidráulica no bombeará de forma continua durante los intervalos de bombeo.

Por otra parte, si se hubiera considerado el intervalo 1 como intervalo de turbinación, la aplicación de la fórmula (**??**) hubiera dado un valor $P_{TH} = 987{,}32$ MW, que no es factible, puesto que excede la potencia demandada en el primer intervalo.

En la **segunda etapa** de la resolución del problema, se debe determinar el tiempo durante el que la central hidráulica deberá bombear, y si lo hace a 100 ó 200 MW.

Se van a examinar los intervalos 4 y 6 por un lado, y el intervalo 5, por otro.

En el intervalo 5 hay tres situaciones posibles, cuyos costes horarios son:

$$
\begin{aligned}
f(P_B = 200) &= 250 + 1,5 \cdot 600 + \frac{1}{200} 600^2 = 2950 \cdot T_{200} \\
f(P_B = 100) &= 2250 \cdot T_{100} \\
f(P_B = 0) &= 1650 \cdot (4 - T_{200} - T_{100}) \\
f_{total} &= 6600 + 1300 \cdot T_{200} + 600 \cdot T_{100}
\end{aligned}
$$

donde T_{200} y T_{100} son los tiempos en los que se bombea a 200 MW y 100 MW, respectivamente, y la última fila es la suma de las otras tres.

Para determinar los tiempos óptimos, hay que observar que los costes crecen linealmente con T_{200} en mayor medida que con T_{100}, por lo que el valor de T_{200} debe hacerse mínimo. Puesto que la cantidad de energía que se debe generar durante estas horas es de 4· 155 = 620 MWh, $T_{200} > 0$, y su valor se calcula a partir de:

$$200(4 - T_{100}) + 100T_{100} = 620$$

de donde se obtiene que T_{100}=1,8 horas y T_{200}=2,2 horas.

En los intervalos 4 y 6 se aplica el mismo procedimiento, y se llega a la expresión de costes totales:

$$f_{total} = 18000 + 1500 \cdot T_{200} + 700 \cdot T_{100}$$

Por lo que el tiempo T_{200} debe ser lo menor posible. En este caso si se puede generar la energía prevista (440 MWh) en las 8 horas de que se dispone. En este caso T_{100}=4,4 horas y T_{200}=0 horas.