

CURSO OCW

FUNDAMENTOS DE TRANSITORIOS EN REDES ELÉCTRICAS

Mónica Alonso Martínez

Juan Carlos Burgos Díaz

M^a Ángeles Moreno López de Saá



Tema 1.
Ecuaciones diferenciales ordinarias

Índice

1. Respuesta de un sistema físico a una variación de la excitación	2
2. Resolución de ecuaciones diferenciales lineales en el dominio del tiempo	3
2.1. Solución a la ecuación homogénea	5
2.2. Estabilidad e inestabilidad de sistemas	6
2.3. Solución a la ecuación particular	7
2.4. Obtención de las constantes de integración	7
2.5. Ejemplo de aplicación	9
3. Métodos de integración numérica	13
3.1. Propiedades de los algoritmos de integración numérica	16
3.1.1. Estimación del error	16
3.1.2. Estabilidad numérica de los algoritmos de integración	18
3.2. Ejemplo de aplicación	21
3.3. Aplicación de los algoritmos de integración numérica a la resolución de sistemas dinámicos lineales	23
3.3.1. Resolución mediante Euler explícito	24
3.3.2. Resolución mediante Euler implícito	24
3.3.3. Resolución mediante la Regla trapezoidal	24
4. Aplicación de la Transformada de Laplace a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias	25
4.1. La transformada de Laplace	25
4.2. Propiedades fundamentales	27
4.3. Transformadas de las funciones más comunes	28
4.4. Ejemplo de aplicación	29

1. Respuesta de un sistema físico a una variación de la excitación

Un sistema físico tiene una o varias entradas (por ejemplo, la fuerza, el calor inyectado, etc.) y una o varias salidas (por ejemplo, la posición, la temperatura, etc.). Al variar una de las entradas las salidas varían. A menudo, en la evolución temporal de las variables de salida cabe distinguir dos períodos: en el segundo, denominado **régimen permanente**, las salidas del sistema responden estrictamente a las entradas, mientras que en el primero, denominado **régimen transitorio**, las salidas se acomodan desde el estado inicial del sistema (el caso más sencillo se da cuando el sistema parte del reposo) hasta el régimen permanente.

Así, si la variable de entrada al sistema tiene forma sinusoidal, en el régimen transitorio las variables de salida evolucionan de una forma no periódica, mientras que en el régimen permanente las variables de salida se repiten con una cierta cadencia, esto es, evolucionan de forma periódica. Por ejemplo, en la figura 1.1 se muestra la evolución en el tiempo de la intensidad de cortocircuito de una red eléctrica. Se observa el régimen transitorio (desde $t=0$ a $t=0,06$ s) y el régimen permanente (desde $t=0,06$ s en adelante).

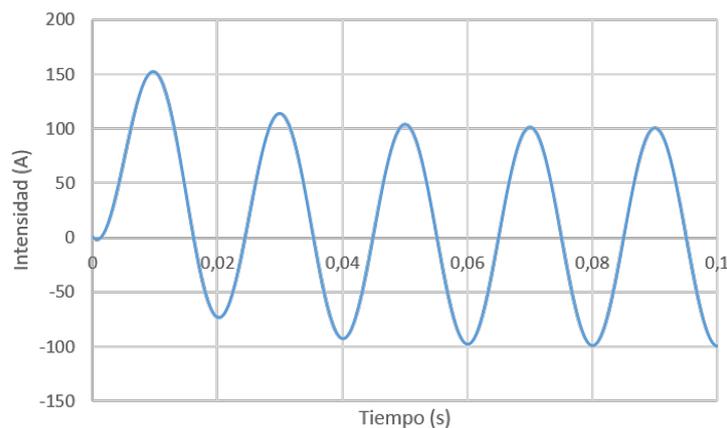


Figura 1.1: Evolución temporal de la intensidad de cortocircuito de una red eléctrica.

En lo que sigue, por simplicidad, admitiremos que el sistema tiene una sola entrada (a la que llamaremos u) y una salida (a la que llamaremos x). Aunque en general las variables u y x son funciones del tiempo, por simplicidad en la mayoría de los casos las denotaremos como u y x . En alguna ocasión, para enfatizar la idea de la dependencia temporal, se denotarán como $u(t)$ y $x(t)$.

La relación entre la variable de entrada (o excitación) al sistema y la variable de salida (o respuesta) del sistema se obtiene a través de las leyes de la física, y la aplicación de tales leyes conduce a una ecuación en la que frecuentemente intervienen la variable de entrada, la variable de salida y sus derivadas (ecuación (1.1)).

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = u \quad (1.1)$$

Una ecuación como la anterior, que relaciona una variable y sus derivadas con otra variable se denomina ecuación diferencial. A n se le suele llamar *orden de la ecuación diferencial*.

Frecuentemente la excitación al sistema (variable de entrada al sistema u) es un dato, y lo que se desea conocer es la respuesta del sistema ante dicha excitación (variable de salida x). Para conocer la evolución en el tiempo de la variable de salida se debe resolver la ecuación diferencial, esto es, el valor de x que verifica la ecuación (1.1).

En una ecuación diferencial los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ pueden depender del tiempo, de las variables de entrada, de las variables de salida o pueden ser constantes. En los primeros casos mencionados se dice que la ecuación diferencial es *no lineal* mientras que en el último se dice que la ecuación diferencial es *lineal*.

Una ecuación diferencial lineal tiene siempre una solución analítica. Por el contrario, una ecuación diferencial no lineal no siempre tiene una solución analítica y en ocasiones no hay más remedio que resolverla de forma numérica. El disponer de una solución analítica tiene la ventaja de que se puede razonar de forma sencilla cómo varían los principales parámetros de la variable de salida del sistema (amplitud, período, etc.) ante determinadas variaciones de la señal de entrada, por eso siempre que se pueda, es preferible resolver una ecuación diferencial de forma analítica.

En el presente tema se aborda la resolución de ecuaciones diferenciales lineales por tres procedimientos:

1. Resolución de la ecuación homogénea y obtención de la solución particular
2. Métodos numéricos
3. Transformada de Laplace

El primero de los procedimientos permite comprender mejor el significado físico del proceso que está teniendo lugar, aunque en ocasiones es un poco farragoso de utilizar. El segundo de los procedimientos se utiliza especialmente para resolver ecuaciones diferenciales no lineales, aunque puede ser utilizado también para resolver ecuaciones diferenciales lineales. El tercero de los procedimientos es más sencillo de utilizar, aunque se pierde el significado físico de lo que está sucediendo.

2. Resolución de ecuaciones diferenciales lineales en el dominio del tiempo

La solución a una ecuación diferencial lineal como la mostrada en (1.1) se puede expresar como suma de dos términos

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t), \quad (2.1)$$

donde $x_h(t)$ es la solución de la ecuación homogénea (o respuesta libre) y $x_p(t)$ es la solución particular de la ecuación diferencial (1.1), también llamada respuesta forzada.

La ecuación homogénea es la ecuación que muestra la respuesta del sistema en ausencia de excitación (por ejemplo, cuando se retira la tensión aplicada a un circuito eléctrico).

$$a_n \frac{d^n x_h}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_h}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx_h}{dt} + a_0 x_h = 0. \quad (2.2)$$

Es evidente que si introduciendo $x_h(t)$ en la expresión

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x \quad (2.3)$$

la suma vale cero, y al introducir $x_p(t)$ en (2.3) la suma da u , al introducir en la expresión (2.3) la suma de $x_h(t)$ y $x_p(t)$ el resultado será también u y, por tanto, dicha suma es la solución a la ecuación diferencial (1.1).

¿Por qué expresar $x(t)$ como suma de dos términos? ¿Por qué no valdría sólo con el término $x_p(t)$? Porque hay determinadas variables de un sistema que están relacionadas con la energía almacenada en un sistema físico (por ejemplo, la velocidad y la posición en un sistema mecánico, la temperatura en un sistema térmico, el flujo en un sistema magnético, etc.). Las variables representativas de la energía almacenada en un sistema deben tener una evolución continua al transcurrir el tiempo, ya que si se desea que la energía varíe de forma finita en un tiempo infinitesimal se debe aportar una potencia infinita, como se muestra en (2.4) y eso no es físicamente realizable¹

$$p(t) = \frac{dW}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta W}{0} = \infty, \quad (2.4)$$

donde $p(t)$ es la potencia, W la energía y t el tiempo.

Si en el instante $t = 0$ aplicamos una excitación u a la ecuación (1.1), en general la variable $x_p(t)$ será una variable discontinua en el tiempo, pues antes de aplicar la excitación al sistema la variable vale 0 y, sin embargo, un instante posterior (aunque infinitamente próximo a $t = 0$) a aplicar la excitación, la solución particular, $x_p(0^+)$, en general será no nula. Por tanto, hace falta un sumando, $x_h(t)$, que haga que la variable que muestra la respuesta del sistema, $x(t)$, sea una función continua en el tiempo. Con ello se consigue cumplir con la ecuación matemática que rige el sistema, conservando el significado físico de los fenómenos que ocurren.

¹Por ejemplo, en un automóvil eléctrico, la potencia del motor necesario está relacionada con el tiempo de aceleración. Si se desea que el automóvil pase de 0 a 100 km/h en 10 segundos, el motor debe ser más potente que si se desea que el tiempo de aceleración sea de 12 segundos. Sin embargo, para conseguir un tiempo de aceleración nulo haría falta un motor que proporcionara una potencia infinita para que la energía cinética pasara en un tiempo nulo desde 0 J al valor que corresponde a 100 km/h.

2.1. Solución a la ecuación homogénea

Como se indicó en un apartado anterior, la ecuación homogénea viene dada por la expresión:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0. \quad (2.5)$$

La igualdad (2.5) debe verificarse en todo instante del tiempo. Pero, para que una suma de varios términos que varían en el tiempo valga cero en cualquier instante de tiempo, es preciso que todos los términos tengan la misma evolución en el tiempo.

Por tanto, el problema de obtener la expresión matemática de $x_h(t)$ consiste en encontrar una función matemática que tenga la misma expresión que sus derivadas, y esa función matemática es la función exponencial. Se deduce, por tanto, que la solución a la ecuación homogénea es una suma de funciones exponenciales:

$$x_h(t) = k_n e^{p_n t} + k_{n-1} e^{p_{n-1} t} + \dots + k_1 e^{p_1 t} = \sum k_i e^{p_i t}. \quad (2.6)$$

Falta por determinar los valores de los diferentes coeficientes k_i y p_i .

Para determinar el valor de p_i se sustituye la ecuación (2.6) en la (2.5). No obstante, como se dijo anteriormente, para que una suma dé un valor nulo en todo instante de tiempo, todos los sumandos deben tener idéntica evolución en el tiempo. Por tanto, la ecuación (2.5) debe cumplirse para cada una de las exponenciales. Por ello sustituiremos en la ecuación (2.5) sólo uno de los sumandos de la ecuación (2.6), por ejemplo el sumando m , con lo que queda

$$\sum_{i=0}^n a_i k_m p_m^i e^{p_m t} = 0. \quad (2.7)$$

Como el valor de $k_m e^{p_m t}$ es idéntico en todos los sumandos de la ecuación (2.7), se puede sacar factor común. Además, como dicho producto es no nulo, se debe cumplir

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot p_m^i = 0, \quad (2.8)$$

esto es

$$a_n p_m^n + a_{n-1} p_m^{n-1} + \dots + a_1 p_m + a_0 = 0 \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9), en la que todos los coeficientes a_i son conocidos, permite obtener el valor de p_m . A esta ecuación se le suele llamar *polinomio característico* de la ecuación diferencial.

Como es sabido, un polinomio de orden n tiene n raíces, de forma que la ecuación (2.9) proporciona n valores para p_m . Por tanto, la solución de la ecuación homogénea de una ecuación diferencial de orden n es la suma de n funciones exponenciales.

Para conocer la solución a la ecuación homogénea, queda por obtener el valor de las constantes k_i , pero el valor de estas constantes no se podrá obtener hasta haber obtenido la solución particular de la ecuación diferencial, $x_p(t)$.

2.2. Estabilidad e inestabilidad de sistemas

En general, parte de las n raíces de la ecuación característica serán números reales y otra parte serán números complejos de la forma²

$$p_m = \sigma_m \pm j\omega_m. \quad (2.10)$$

En aquellos sumandos de la respuesta libre en los que p_m sea un número real, la respuesta del sistema es una respuesta exponencial. Si $p_m > 0$, la respuesta del sistema crece indefinidamente al transcurrir el tiempo hasta infinito. Sin embargo, si $p_m < 0$ la respuesta libre del sistema disminuye al transcurrir el tiempo, hasta llegar a anularse.

En aquellos sumandos de la respuesta libre en los que p_m sea un número complejo, la respuesta libre puede expresarse como

$$x_{hm}(t) = k_m e^{p_m t} = k_m e^{(\sigma_m + j\omega_m)t} = k_m e^{\sigma_m t} [\cos(\omega_m t) + j \operatorname{sen}(\omega_m t)], \quad (2.11)$$

lo cual corresponde a una función oscilante. Llamaremos a ω_m pulsación³ natural m -ésima del sistema. La pulsación natural se mide en radianes/segundo, y no debe ser confundido con la frecuencia natural, f_m , que se mide en Hz. La relación entre pulsación natural y frecuencia natural viene dada por la expresión (2.12).

$$\omega_m = 2\pi f_m \quad (2.12)$$

Como se observa en la ecuación (2.11) la respuesta oscilante viene multiplicada por un término exponencial. En el caso de que $\sigma_m > 0$, la respuesta oscilante iría aumentando al transcurrir el tiempo hasta hacerse infinita. Sin embargo, si $\sigma_m < 0$, la respuesta oscilante iría disminuyendo al transcurrir el tiempo hasta anularse pasado un tiempo suficientemente grande. Llamaremos a σ_m *amortiguamiento* de la pulsación natural m -ésima.

Como se dijo anteriormente, la solución de una ecuación diferencial es la suma de dos términos, el término libre, $x_h(t)$, y el término forzado $x_p(t)$. Cuando una persona tiene un sistema, esa persona quiere que el sistema responda de una forma determinada. El término forzado es la solución particular de la ecuación diferencial y, por tanto, depende de la excitación aplicada al sistema. Sin embargo, el término libre no depende de la excitación al sistema, sino que vale lo mismo sea cual sea la excitación aplicada. Para que un sistema sea controlable es preciso que al representar las raíces de la ecuación característica en un plano complejo, todas las raíces se encuentren en el semiplano negativo, como se muestra en la figura 2.1 para un sistema de cuarto orden.

Como se observa en la ecuación (2.11) cuanto mayor sea el valor absoluto de σ_m antes se amortiguará el sistema. Por el contrario, cuanto más cerca del origen se encuentre σ_m más tiempo durarán las oscilaciones en la respuesta del sistema.

²En (2.10), j es el número imaginario $\sqrt{-1}$, al cual en matemáticas se le suele llamar i , pero en electricidad la letra i está reservada para la intensidad de la corriente, por lo que todos los libros de electricidad utilizan en su lugar el símbolo j .

³En los libros anglosajones, en lugar de pulsación se denomina frecuencia angular.

2.3. Solución a la ecuación particular

La expresión matemática de solución particular de la ecuación (1.1) depende de la expresión matemática de la excitación u al sistema.

En algunos casos es muy sencillo obtener la solución particular de la ecuación diferencial. Así, como se puede demostrar fácilmente, si la excitación al sistema es constante, la solución particular será constante (en electricidad este caso es llamado *corriente continua*, y se suele representar por sus siglas en inglés DC (*direct current*). Otro caso particularmente sencillo es el que corresponde a una excitación sinusoidal; en ese caso la salida también es una senoide, en general desfasada de la senoide de entrada (en electricidad este caso es llamado *corriente alterna*, y se suele representar por sus siglas en inglés AC (*alternating current*).

Ya se ha indicado anteriormente que en un sistema estable la solución a la ecuación diferencial homogénea (solución libre) disminuye conforme avanza el tiempo, hasta finalmente extinguirse. Por tanto, la solución a la ecuación particular (solución forzada) es la única que perdura pasado un tiempo suficientemente largo, y por eso se dice que es la solución al régimen permanente del sistema.

El estudio de los regímenes permanentes en un circuito eléctrico es objeto de una asignatura diferente del Grado en Ingeniería Eléctrica llamada Fundamentos de Ingeniería Eléctrica y, por lo tanto, no se justificará aquí la forma de obtener la expresión matemática de la solución particular de la ecuación diferencial, y se remite a las personas interesadas en este aspecto a la mencionada asignatura.

2.4. Obtención de las constantes de integración

En el subapartado destinado a la resolución de la ecuación diferencial homogénea (sección 2.1) se indicó la expresión general de la misma, y la forma de obtener los coeficientes p_i a

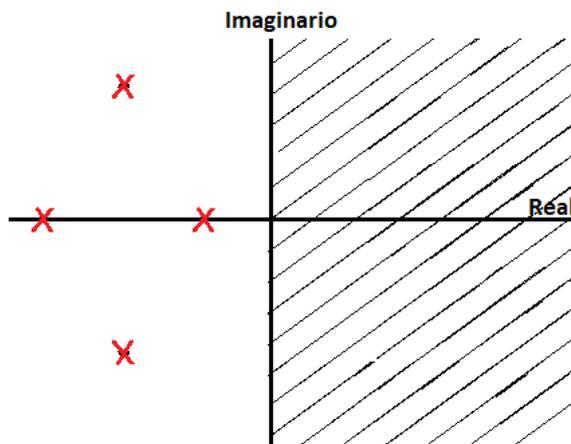


Figura 2.1: Representación de las raíces del polinomio característico de una ecuación diferencial homogénea. La zona rayada corresponde a la respuesta inestable.

partir del polinomio característico, pero se pospuso la obtención de las constantes k_i hasta haber estudiado la solución particular de la ecuación diferencial.

Cuando se indicó que la solución a una ecuación diferencial es la suma de la solución de la ecuación homogénea y la solución particular se justificó esta afirmación en base a que las variables representativas de la energía de un sistema deben ser variables continuas. La obtención de las constantes de integración se realiza precisamente con el objetivo de respetar esa condición.

En física cada elemento almacenador de energía proporciona una ecuación diferencial de primer orden. El número de ecuaciones diferenciales de un sistema es igual al número de elementos almacenadores de energía. Combinando las ecuaciones diferenciales de los diferentes elementos almacenadores de energía se obtiene la ecuación diferencial del sistema, que es una ecuación diferencial de orden n .

Para mayor sencillez, supongamos que se tiene un sistema con un solo elemento almacenador de energía. La solución de la ecuación diferencial de la variable representativa de la energía almacenada en el sistema será

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = ke^{pt} + f(t) \quad (2.13)$$

donde $f(t)$ es la solución particular.

En este caso se tiene una única constante de integración, k . Para obtener el valor de k expresaremos que el valor de x antes y después de aplicar la excitación al sistema debe ser idéntico

$$x(0^-) = x(0^+) = k + f(0^+) \quad (2.14)$$

De modo que la constante de integración vale

$$k = x(0^-) - f(0^+). \quad (2.15)$$

Para el caso de que se tengan dos elementos almacenadores de energía, se tendrán dos variables representativas de la energía almacenada

$$x_1(t) = x_{1h}(t) + x_{1p}(t) = k_1e^{p_1t} + k_2e^{p_2t} + f(t) \quad (2.16)$$

$$x_2(t) = x_{2h}(t) + x_{2p}(t) = C_1k_1e^{p_1t} + C_2k_2e^{p_2t} + g(t), \quad (2.17)$$

donde C_1 y C_2 son constantes conocidas.

En este caso se debe obtener el valor de dos constantes de integración: k_1 y k_2 .

Particularizando para $t = 0$ e imponiendo la condición de que las variables de estado deben ser variables continuas en el tiempo se llega a

$$x_1(0^-) = k_1 + k_2 + f(0^+) \quad (2.18)$$

$$x_2(0^-) = C_1k_1 + C_2k_2 + g(0^+). \quad (2.19)$$

Conocidas $x_1(0^-)$, $x_2(0^-)$, C_1 , C_2 , $f(0^+)$ y $g(0^+)$, las ecuaciones (2.18) y (2.19) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que permiten hallar k_1 y k_2 . Esto se verá, particularizado para ejemplos concretos, en las clases de problemas.

2.5. Ejemplo de aplicación

Una instalación eléctrica está alimentada desde una fuente por medio de dos conductores de aluminio de 16 mm^2 de sección. En un instante determinado se cierra el interruptor que conecta la fuente con la carga. Sabiendo que la instalación consume una corriente de 97 A , se pide **obtener la evolución de la temperatura del conductor a lo largo del tiempo**.

Datos:

- Temperatura ambiente, $T_{amb} = 21 \text{ }^\circ\text{C}$.
- Capacidad calorífica específica del aluminio (o calor específico), $c_e = 897 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$
- Resistividad del aluminio, $\rho = 0,0282 \text{ }\Omega\cdot\text{mm}^2/\text{m}$
- Densidad del aluminio, $\delta = 2,7 \text{ kg}/\text{dm}^3$
- Constante de transmisión de calor, $h = 20 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$

Hipótesis simplificativas:

- Se admite que el conductor es macizo y de sección circular.
- Se tomará el conductor indefinidamente largo.
- Se admite que los conductores de ida y de vuelta están suficientemente distanciados como para que el calor generado por uno de ellos no influya en la temperatura del otro.
- Se admite que ni la resistividad ni la capacidad calorífica específica del aluminio dependen de la temperatura.
- Se admite que todo el conductor se encuentra a la misma temperatura.

Solución:

La ecuación que proporciona el incremento de temperatura de un cuerpo entre dos instantes infinitamente próximos es

$$dQ_g = dQ_a + dQ_d \quad (2.20)$$

donde Q_g es el calor generado, Q_a el calor almacenado y Q_d el calor disipado al exterior.

El calor generado en el conductor es producido por efecto Joule:

$$dQ_g = P_g \cdot dt = R \cdot I^2 \cdot dt \quad (2.21)$$

donde P_g son las pérdidas por efecto Joule, dt es la diferencia de tiempo entre dos instantes infinitamente próximos y R es la resistencia eléctrica que ofrece el conductor al paso de corriente I .

La resistencia depende de la resistividad del material ρ , de la longitud del cable l y de la sección del mismo s , según

$$R = \rho \frac{l}{s} \quad (2.22)$$

Como el cable es indefinidamente largo, haremos el estudio por unidad de longitud y tomaremos $l = 1$ m, con lo que la resistencia vale

$$R = 0,0282 \cdot \frac{1}{16} = 0,00176 \quad [\Omega]$$

Las pérdidas por efecto Joule serán entonces

$$P_g = R \cdot I^2 = 0,00176 \cdot 97^2 = 16,58 \quad [\text{W}]$$

Y el calor generado es

$$dQ_g = 16,58 \cdot dt \quad [\text{J}]$$

El calor almacenado se debe al incremento de temperatura del cuerpo

$$dQ_a = m \cdot c_e \cdot dT \quad (2.23)$$

donde m es la masa del cuerpo, c_e es el calor específico y dT es el incremento de temperatura entre dos instantes infinitamente próximos.

La masa del conductor m se obtiene como producto del volumen V por la densidad δ , y el volumen del conductor viene dado por el producto de su sección s y su longitud l . Es decir, el calor almacenado se puede poner como

$$dQ_a = V \cdot \delta \cdot c_e \cdot dT = s \cdot l \cdot \delta \cdot c_e \cdot dT. \quad (2.24)$$

Sustituyendo valores⁴ se tiene que el calor almacenado por metro de longitud de conductor es

$$dQ_a = 16 \cdot 10^{-4} \cdot 10 \cdot 2,7 \cdot 897 \cdot dT = 38,75 \cdot dT \quad [\text{J}]$$

El calor disipado al ambiente depende del área lateral del conductor A , de la constante de transmisión de calor h y del salto térmico entre el conductor y el ambiente, $T - T_{amb}$,

$$dQ_d = A \cdot h \cdot (T - T_{amb}) \cdot dt. \quad (2.25)$$

El área lateral viene dada por

$$A = 2\pi r \cdot l, \quad (2.26)$$

siendo r el radio del conductor

$$r = \sqrt{\frac{s}{\pi}} = \sqrt{\frac{16}{\pi}} = 2,257 \text{ mm}$$

⁴Se han pasado las unidades de longitud a dm.

con lo que el calor disipado al ambiente por metro de longitud viene dado por

$$dQ_d = 2\pi r \cdot l \cdot h \cdot (T - T_{amb}) \cdot dt \quad (2.27)$$

La diferencia de temperaturas en K coincide con la diferencia de temperaturas en °C y, por tanto, tenemos

$$dQ_d = 2 \cdot \pi \cdot 2,257 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 20 \cdot (T - 21) \cdot dt = 0,284 \cdot (T - 21) \cdot dt$$

Por tanto, la ecuación diferencial que rige el calentamiento del conductor es

$$R \cdot I^2 \cdot dt = m \cdot c_e \cdot dT + A \cdot h \cdot (T - T_{amb}) \cdot dt \quad (2.28)$$

Dividiendo toda la ecuación por dt queda

$$R \cdot I^2 = m \cdot c_e \cdot \frac{dT}{dt} + A \cdot h \cdot (T - T_{amb}) \quad (2.29)$$

Sustituyendo valores

$$16,58 = 38,75 \cdot \frac{dT}{dt} + 0,284 \cdot (T - 21)$$

y reordenando, llegamos a la ecuación diferencial que debemos resolver

$$\boxed{38,75 \cdot \frac{dT}{dt} + 0,284 \cdot T = 22,54} \quad (2.30)$$

Vamos a hallar la temperatura T como suma de la solución de la ecuación homogénea y la solución particular:

$$T = T_h + T_p$$

Solución de la ecuación homogénea: La ecuación homogénea viene dada por

$$38,75 \cdot \frac{dT_h}{dt} + 0,284 \cdot T_h = 0 \quad (2.31)$$

Para obtener el polinomio característico se sustituye el operador derivada por p

$$38,75 \cdot p + 0,284 = 0$$

Con lo que

$$p = -\frac{0,284}{38,75} = -0,00733.$$

Las unidades de p son segundos⁻¹. Llamaremos constante de tiempo, τ , al valor absoluto de la inversa de p

$$\tau = \left| \frac{1}{p} \right| = \frac{1}{0,00733} = 136,44 \quad [s].$$

En este caso la constante de tiempo es algo más de 2 minutos.

La solución a la ecuación homogénea es

$$T_h = k \cdot e^{pt} = k \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = k \cdot e^{-0,00733 \cdot t} \quad (2.32)$$

Solución particular: Se trata de encontrar un valor de $T_p = T_{RP}$ tal que

$$38,75 \cdot \frac{dT_{RP}}{dt} + 0,284 \cdot T_{RP} = 22,54. \quad (2.33)$$

T_{RP} será la temperatura en régimen permanente, una vez finalizado el transitorio.

El aspecto de la solución particular depende del aspecto de la excitación. Como en este caso el término libre es constante, la solución particular es constante, con lo que el término en derivada es nulo y queda

$$0 + 0,284 \cdot T_{RP} = 22,54$$

Con lo que

$$T_{RP} = \frac{22,54}{0,284} = 79,4 \quad [^{\circ}\text{C}]$$

Por tanto, una vez encontradas ambas soluciones, la evolución de la temperatura del conductor en el tiempo será

$$T(t) = K \cdot e^{-0,00733 \cdot t} + 79,4 \quad [^{\circ}\text{C}] \quad (2.34)$$

El valor de K se obtiene sabiendo que, al ser la temperatura una variable de estado (una variable significativa de la energía térmica almacenada en el conductor), debe ser una variable continua en el tiempo. Es decir, se debe cumplir

$$T(0^-) = T(0^+).$$

Por tanto, si suponemos que inicialmente la temperatura del conductor es idéntica a la temperatura ambiente, podemos expresar

$$21 = K \cdot e^{-0,00733 \cdot 0} + 79,4$$

Por tanto,

$$K = 21 - 79,4 = -58,4 \quad [^{\circ}\text{C}]$$

Finalmente, la evolución de la temperatura del conductor a lo largo del tiempo vendrá dada por

$$\boxed{T(t) = 79,4 - 58,4 \cdot e^{-0,00733 \cdot t}} \quad (2.35)$$

Una exponencial alcanza el 95 % de su valor final en 3 constantes de tiempo. De forma aproximada podemos decir que la duración de un transitorio de primer orden es 3τ .

En el caso del problema $3\tau = 409$ s, esto es 6,8 minutos.

La evolución de la temperatura en el tiempo se muestra en la figura 2.5

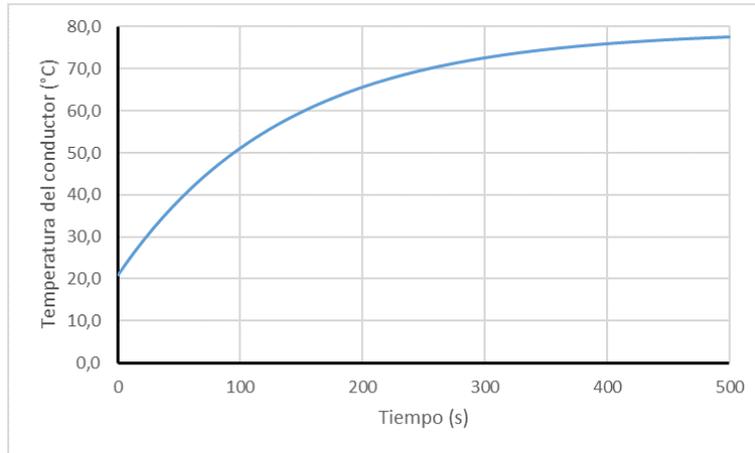


Figura 2.2: Evolución de la temperatura del conductor en el tiempo.

3. Métodos de integración numérica

Un sistema dinámico se representa normalmente mediante una ecuación diferencial ordinaria (lineal o no lineal) de primer orden

$$\dot{x} = f(u(t), x(t), t), \quad (3.1)$$

donde $u(t)$ es la excitación al sistema (o entrada), $x(t)$ es la variable de estado (por ejemplo, la corriente que circula en un circuito eléctrico) y t es el tiempo, la variable independiente. En el caso más simple, la función derivada, f , depende sólo de la excitación al sistema $u(t)$ (en el caso de un circuito eléctrico, la tensión aplicada al mismo) y del tiempo t , pero en casos más complejos f puede ser una función de la excitación aplicada al sistema u y de la propia variable de estado x , además del tiempo t .

Se necesitan también condiciones iniciales para la variable de estado:

$$x(t_0) = x_0. \quad (3.2)$$

A (3.2) se le llama condición de contorno de la ecuación diferencial (3.1). La solución analítica (exacta) de (3.1) y (3.2) viene dada por la expresión (3.3) que define la evolución temporal de la variable de estado x a partir del instante de tiempo inicial t_0 .

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x, \tau) d\tau \quad (3.3)$$

Esta solución raras veces se puede encontrar, o es muy laborioso hacerlo, y por ello, se obtiene normalmente la solución numérica, que consiste en una secuencia de valores $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ que aproximan a la solución exacta de la ecuación en sucesivos instantes de tiempo $\{t_1, t_2, t_3, \dots, t_n\}$. Para ello será necesario un algoritmo de integración, mediante el que se obtiene el valor aproximado de la evolución temporal de la variable x en cada instante

t_i . Llamaremos $x(t_i)$ al valor exacto de la variable en el instante t_i y x_i al valor aproximado en dicho instante de tiempo, obtenido por aplicación del algoritmo de integración.

El intervalo de tiempo entre dos instantes consecutivos en los que se ha hallado el valor numérico aproximado de x se llama paso de integración, y se denota habitualmente por h ,

$$h = t_i - t_{i-1}. \quad (3.4)$$

La solución numérica así obtenida se desvía de la solución real, de forma que se tiene un error de integración. Se denomina error local al error que se produce tras un paso de integración, suponiendo que el valor de la variable en el instante anterior es correcto. Este error tiene dos partes: el error de redondeo, que es la parte del error local debida a imprecisiones numéricas del ordenador empleado, y el error de truncamiento, que es la parte del error local debida al algoritmo empleado.

En general un algoritmo de integración obtiene el valor de x en t_{n+1} , conocido el valor de x en t_n , con un paso de integración h , a través de un cálculo que incluye valores obtenidos anteriormente $\{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots\}$ y el valor de la función derivada en el instante de tiempo considerado y en los precedentes $\{f(u_n, x_n, t_n), f(u_{n-1}, x_{n-1}, t_{n-1}), f(u_{n-2}, x_{n-2}, t_{n-2}), \dots\}$.

Los algoritmos monopaso sólo necesitan información de los valores de las variables en un instante de tiempo, mientras que los algoritmos multipaso pueden necesitar información de las variables en distintos instantes.

Los algoritmos de integración numérica pueden ser también explícitos o implícitos. Los algoritmos explícitos, también llamados de tipo abierto o adelantados, obtienen el valor de las variables en un instante a partir de los valores de dicha variable en instantes anteriores, mientras que los algoritmos de tipo implícito, también llamados de tipo cerrado, obtienen la variable a partir de los valores de ésta en los instantes anteriores y en el instante que se pretende calcular, como se verá a continuación.

Algunos de los algoritmos de integración numérica monopaso más simples (y más frecuentemente utilizados) son los siguientes:

- Euler explícito:

$$x_{n+1} = x_n + hf_n \quad (3.5)$$

- Euler implícito:

$$x_{n+1} = x_n + hf_{n+1} \quad (3.6)$$

- Regla trapezoidal:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1}) \quad (3.7)$$

En las expresiones anteriores, $f_n = f(u_n, x_n, t_n)$ y $f_{n+1} = f(u_{n+1}, x_{n+1}, t_{n+1})$.

Para entender mejor las formulas que aparecen en las expresiones anteriores, y que definen los distintos algoritmos, se puede decir que las diferentes reglas surgen al tomar aproximaciones

para la integral definida que aparece en (3.3), tomando dos instantes de tiempo muy próximos t_n y t_{n+1} , separados por un paso de integración h ($t_{n+1} = t_n + h$).

La figura 3.1 ilustra estas tres reglas, para un caso particular, pero que es suficientemente ilustrativo. En la figura 3.1a se muestra la integral exacta de la función f (área rayada); en la figura 3.1b se muestra la aproximación realizada al utilizar el método de Euler explícito, donde el área rayada se ha sustituido por un rectángulo de base h y altura $f(t_n)$; en la figura 3.1c se representa la aproximación realizada en el método de Euler implícito, donde la integral se ha sustituido por un rectángulo de base h y altura $f(t_{n+1})$; y en la figura 3.1d se representa la aproximación realizada en la Regla trapezoidal, en la que el área rayada de la figura 3.1a se sustituye por el área de un trapecio.

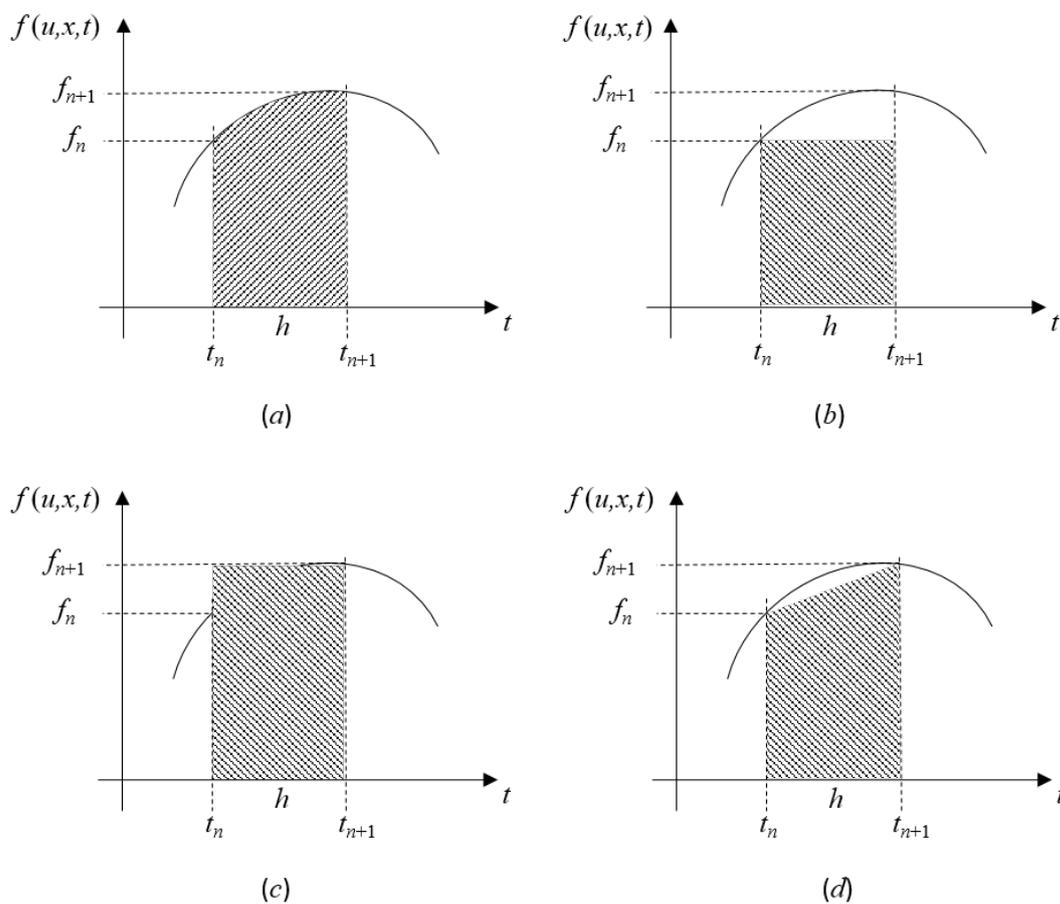


Figura 3.1: (a) Integración exacta; (b) Aproximación en Euler explícito; (c) Aproximación en Euler implícito; (d) Aproximación en la Regla trapezoidal.

3.1. Propiedades de los algoritmos de integración numérica

Un algoritmo de integración numérica debe satisfacer tres propiedades: precisión numérica, estabilidad numérica y eficiencia numérica.

- La precisión numérica asegura que el error local permanece acotado tras cada paso de integración.
- La estabilidad numérica es la propiedad por la que los errores debidos a las aproximaciones sucesivas se van atenuando conforme avanza el algoritmo. Se dice que un algoritmo es estable cuando el error es semejante al paso de integración. En estos casos el error total decrece cuando disminuye el paso de integración, h . Sin embargo, si el algoritmo es inestable, el error se magnifica conforme avanza el algoritmo. Un algoritmo con buena estabilidad numérica se dice que es robusto (funciona bien para cualquier valor de h).
- La eficiencia numérica depende del número de cálculos requerido para avanzar el algoritmo en un paso de integración. Depende del valor de h .

3.1.1. Estimación del error

Un método de integración producirá un error en cada instante de tiempo t_n , denominado error local, que es el valor absoluto de la diferencia entre el valor exacto de la variable y el valor obtenido por el método de integración en dicho instante de tiempo:

$$\epsilon = |x(t_n) - x_n|. \quad (3.8)$$

Naturalmente, este error no puede conocerse con exactitud (pues ello implicaría conocer la solución exacta), pero sí es posible obtener una estimación del mismo.

Considerando precisión infinita del sistema de cómputo (es decir, error de redondeo nulo), el error local vendría dado por el error por truncamiento, que puede reducirse disminuyendo el valor del paso de integración h . Se establece generalmente que $\epsilon \sim h^m$, donde m es un exponente que depende del método específico de integración empleado.

A modo de ejemplo, vamos a estimar el error que se comete al integrar numéricamente la ecuación diferencial más sencilla (denominada *problema modelo* porque las ecuaciones homogéneas pueden reducirse a ella en cada punto):

$$\dot{x} = \gamma x, \quad x(0) = 1, \quad (3.9)$$

en donde γ es una constante real o compleja ($\gamma = \sigma + j\omega$).

Solución exacta: la solución exacta de la ecuación anterior es $x(t) = e^{\gamma t}$. Suponiendo conocida la solución exacta en el instante t_n , $x(t_n)$, la solución exacta en un instante posterior t_{n+1} será

$$x(t_{n+1}) = e^{\gamma t_{n+1}} = e^{\gamma(t_n+h)} = x(t_n)e^{\gamma h}, \quad (3.10)$$

siendo h el paso de integración.

Desarrollando en serie de Taylor la función exponencial se obtiene

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) \left[1 + \gamma h + \frac{(\gamma h)^2}{2!} + \frac{(\gamma h)^3}{3!} + \dots \right]. \quad (3.11)$$

Euler explícito: si el valor estimado de la variable se obtiene mediante el algoritmo de Euler explícito, teniendo en cuenta (3.5), su valor será

$$x_{n+1} = x(t_n) [1 + \gamma h], \quad (3.12)$$

por lo que el error cometido con este método es del orden de h^2 , que viene dado, en este caso, por el primer sumando de (3.11) que ha sido ha despreciado:

$$\epsilon \approx \frac{(\gamma h)^2}{2}. \quad (3.13)$$

Euler implícito: aplicando este método para obtener el valor estimado de la variable se tiene, según (3.6),

$$x_{n+1} = x(t_n) [1 + \gamma h]^{-1}, \quad (3.14)$$

que, desarrollando en serie, se puede poner como

$$x_{n+1} = x(t_n) [1 + \gamma h + (\gamma h)^2 + (\gamma h)^3 + \dots]. \quad (3.15)$$

Considerando (3.8), el error también será de orden de h^2 :

$$\epsilon \approx \frac{(\gamma h)^2}{2}. \quad (3.16)$$

Regla trapezoidal: si el valor aproximado se obtiene mediante el algoritmo de la regla trapezoidal, aplicando (3.7) se tiene

$$x_{n+1} = x(t_n) \left[\frac{1 + \frac{\gamma h}{2}}{1 - \frac{\gamma h}{2}} \right]. \quad (3.17)$$

Y si esta expresión se desarrolla en serie, se obtiene

$$x_{n+1} = x(t_n) \left[1 + \gamma h + \frac{(\gamma h)^2}{2} + \frac{(\gamma h)^3}{4} + \dots \right]. \quad (3.18)$$

Comparando las expresiones (3.11) y (3.18), se desprende que el error depende de h^3 , pues las expresiones coinciden en los tres primeros términos:

$$\epsilon \approx \left| \frac{(\gamma h)^3}{3!} - \frac{(\gamma h)^3}{4} \right| = \frac{(\gamma h)^3}{12}. \quad (3.19)$$

Puesto que, en general, $h \ll 1$, este error será tanto menor cuanto mayor sea el exponente de h , luego la Regla Trapezoidal es el algoritmo que mejor se comporta en términos de precisión numérica (menor error local).

3.1.2. Estabilidad numérica de los algoritmos de integración

La estabilidad es una de las propiedades más críticas de los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales.

Es posible que la solución numérica de una ecuación diferencial crezca sin límite, aun cuando la solución exacta (no conocida, en general) permanezca acotada.

En el análisis de la estabilidad, se buscan las condiciones y parámetros del método numérico para los cuales la solución numérica permanece acotada, siendo el parámetro más importante el paso de integración h .

La estabilidad de los métodos se estudia por medio del problema modelo. El sistema definido por la ecuación diferencial (3.9) es estable (esto es, su respuesta tiende a cero para un tiempo infinito) cuando la parte real de γ cumple que $\sigma < 0$. Esta condición se cumple en la zona del semiplano izquierdo de la figura 3.2.

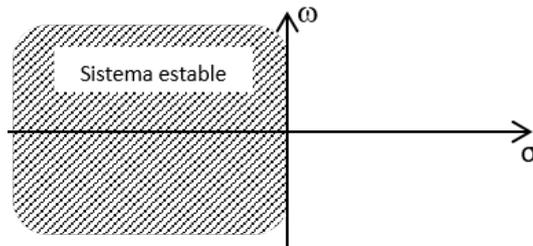


Figura 3.2: Zona de estabilidad del problema modelo.

Se puede demostrar que los tres algoritmos vistos en anteriores apartados son estables. Sin embargo, en determinados sistemas puede suceder que sea necesario escoger un paso de integración muy pequeño, lo que conlleva muchas más operaciones. Por esto, se define la zona de estabilidad absoluta como el conjunto de los valores de (γh) para los que el algoritmo es estable.

Cuando la integración se realiza mediante el método de Euler explícito, el valor aproximado de $x(t_n)$ será, si $x(0) = 1$,

$$x_n = x_{n-1} + h(\gamma x_{n-1}) = x_{n-1}(1 + \gamma h). \quad (3.20)$$

Aplicando de forma recursiva esta fórmula, se obtiene:

$$x_n = [1 + \gamma h]^n. \quad (3.21)$$

En este caso, a medida que n crece, la respuesta tiende a cero siempre y cuando se cumpla que

$$|1 + \gamma h| < 1 \quad (3.22)$$

o bien,

$$(1 + \sigma h)^2 + (\omega h)^2 < 1 \quad (3.23)$$

que, geométicamente, representa el interior de un círculo en el plano $(\sigma h) - (\omega h)$ de centro el punto $(-1, 0)$ y de radio la unidad, como se muestra en la figura 3.3.

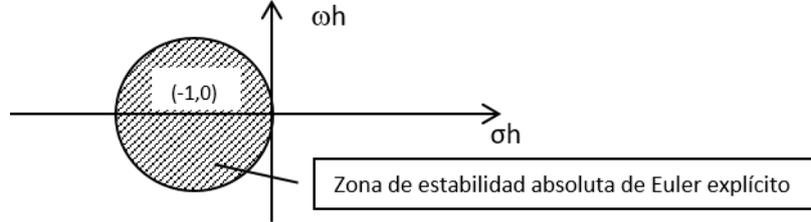


Figura 3.3: Zona de estabilidad absoluta del problema modelo integrado por el algoritmo de Euler explícito.

La zona mostrada en la figura 3.3 no concuerda con la estabilidad del sistema definido por la ecuación diferencial original (zona de la figura 3.2), con lo que habrá sistemas estables en los que será necesario un paso de integración muy pequeño para que se comporten como tales cuando se integran mediante este algoritmo. Así, por ejemplo, si un sistema estable con γ real (por tanto, $\gamma = \sigma < 0$) se integra con un paso de integración $h < -2/\sigma$, los valores de $x(t_n)$ se alejan progresivamente de cero conforme n aumenta, lo que es un resultado erróneo. Por otra parte, para valores de (γh) que estén justo en el círculo, el sistema es oscilatorio, pues la solución analítica va tomando valores $\{-1, 1, -1, 1, \dots\}$.

Dependiendo del valor de σ , este método puede obligar a utilizar un paso de integración muy reducido que haga el problema muy lento de resolver. Este inconveniente se puede solventar utilizando un *paso variable*.

Cuando la integración se realiza mediante el algoritmo de Euler implícito, el valor estimado de $x(t_n)$ será

$$x_n = x_{n-1} + h(\gamma x_n). \quad (3.24)$$

Por tanto,

$$x_n(1 - \gamma h) = x_{n-1} \quad (3.25)$$

$$x_n = x_{n-1}(1 - \gamma h)^{-1} \quad (3.26)$$

Aplicando esta última expresión de forma recursiva (y considerando que $x(0) = 1$), se obtiene:

$$x_n = [1 - \gamma h]^{-n}. \quad (3.27)$$

En este caso, la respuesta tiende a cero siempre y cuando se cumpla:

$$|1 - \gamma h| > 1 \quad (3.28)$$

o bien,

$$(1 - \sigma h)^2 + (\omega h)^2 > 1 \quad (3.29)$$

que, geoméricamente, es todo el plano $(\sigma h) - (\omega h)$, excepto un círculo de centro el punto $(1, 0)$ y de radio la unidad, como se muestra en la figura 3.4.

Observando la figura 3.4 podemos asegurar que tampoco esta zona concuerda con la del sistema definido por la ecuación diferencial original. El método es estable en el semiplano izquierdo (véase la figura 3.2), por lo que, si el sistema es estable, la solución hallada mediante Euler implícito será numéricamente estable sea cual sea el paso de integración empleado. En el semiplano derecho, el método muestra inestabilidad solamente en el interior del círculo, por ello, habrá sistemas inestables para los que el método proporcionará una secuencia convergente, que no concordará con la real (puesto que en un sistema inestable la respuesta real crece sin límite). Así, por ejemplo, en un sistema inestable con γ real ($\gamma = \sigma > 0$), si se integra con un paso $h > 2/\sigma$, la solución tiende a cero conforme aumenta n , lo que es un resultado erróneo.

Por último, si se aplica la Regla trapezoidal, la estimación de $x(t_n)$ valdrá:

$$x_n = x_{n-1} + \frac{h}{2} (\gamma x_n + \gamma x_{n-1}). \quad (3.30)$$

Por tanto,

$$x_n \left(1 - \frac{\gamma h}{2}\right) = x_{n-1} \left(1 + \frac{\gamma h}{2}\right) \quad (3.31)$$

$$x_n = x_{n-1} \left(\frac{1 + \gamma h/2}{1 - \gamma h/2}\right). \quad (3.32)$$

Aplicando de nuevo recursivamente la última expresión, se tiene que:

$$x_n = \left(\frac{1 + \gamma h/2}{1 - \gamma h/2}\right)^n, \quad (3.33)$$

y la respuesta tiende a cero cuando se cumple:

$$\left|1 + \frac{\gamma h}{2}\right| < \left|1 - \frac{\gamma h}{2}\right|, \quad (3.34)$$

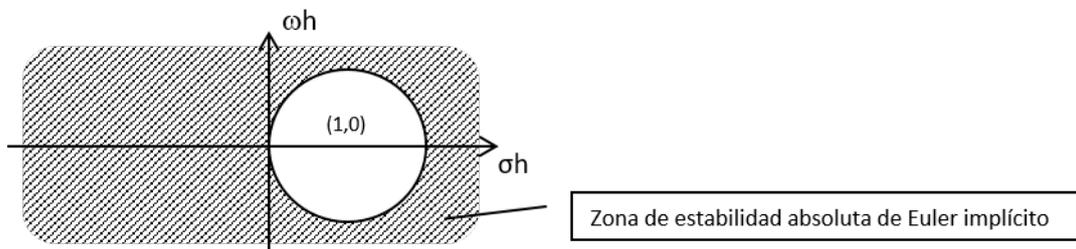


Figura 3.4: Zona de estabilidad absoluta del problema modelo integrado por el algoritmo de Euler implícito.

o, lo que es lo mismo,

$$\left(1 + \frac{\sigma h}{2}\right)^2 + \left(\frac{\omega h}{2}\right)^2 < \left(1 - \frac{\sigma h}{2}\right)^2 + \left(\frac{\omega h}{2}\right)^2. \quad (3.35)$$

Desarrollando (3.35), se llega a que la zona de estabilidad absoluta del algoritmo de la Regla Trapezoidal coincide con el semiplano negativo ($\sigma h < 0$), como se muestra en la figura 3.5.

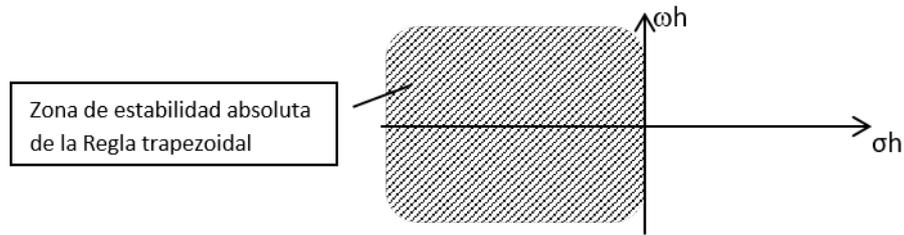


Figura 3.5: Zona de estabilidad absoluta del problema modelo integrado por el algoritmo de la Regla trapezoidal.

Para la Regla trapezoidal, la zona de estabilidad absoluta coincide con la zona de estabilidad del sistema real. Por tanto, cuando el sistema sea estable, este algoritmo de integración numérica mantiene el error acotado.

La ventaja de los métodos implícitos es que generalmente son más estables, lo que permite utilizar pasos de integración más grandes. Esto es de especial interés en sistemas que se rigen por varias constantes de tiempo con órdenes de magnitud muy diferentes.

La principal desventaja de los métodos implícitos es que requieren utilizar la derivada de la función en un punto que todavía no es conocido ($f_{n+1} = f(u_{n+1}, x_{n+1}, t_{n+1})$). Como se verá después en el apartado 3.3, en el caso de ecuaciones diferenciales lineales esto no es un problema, pero sí que lo es en el caso de ecuaciones diferenciales no lineales. En ese caso hay que utilizar procedimientos de tipo Predictor-Corrector, que se basan en una predicción de la derivada f en el punto correspondiente al instante t_{n+1} , f_{n+1} , que posteriormente es corregida.

3.2. Ejemplo de aplicación

Como ejemplo, se va a calcular la solución de la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = -100x, \quad x(0) = 1 \quad (3.36)$$

aplicando diferentes métodos:

- a) Analíticamente.
- b) Numéricamente, mediante Euler explícito, para $h = 0,005$ y $h = 0,02$.

c) Numéricamente, mediante Euler implícito, para $h = 0,02$ y $h = 0,01$.

d) Numéricamente, mediante la Regla Trapezoidal, para $h = 0,01$.

Solución

La solución analítica de la ecuación (3.36) es $x(t) = e^{-100t}$.

Las distintas soluciones numéricas se obtienen mediante los algoritmos a través de las siguientes expresiones:

- Euler explícito: según se vio en la ecuación (3.12),

$$x_{n+1} = x_n(1 - 100h)$$

- Euler implícito: en este caso, la fórmula recursiva viene dada por la ecuación (3.14),

$$x_{n+1} = x_n \left(\frac{1}{1 + 100h} \right)$$

- Regla trapezoidal: según se vio en la ecuación (3.17),

$$x_{n+1} = x_n \left(\frac{1 - \frac{h}{2}100}{1 + \frac{h}{2}100} \right) = x_n \left(\frac{1 - 50h}{1 + 50h} \right)$$

Al ser el sistema estable, los dos métodos implícitos no presentan ningún problema de estabilidad. Pero al integrar con Euler explícito, se debe elegir un paso de integración tal que

$$h < \frac{2}{100} = 0,02,$$

pues se debe cumplir

$$\begin{aligned} |1 - 100h| &< 1 \\ -1 &< 1 - 100h < 1 \\ -2 &< -100h < 0 \\ 2 &> 100h > 0. \end{aligned}$$

Entonces,

- si $h < 0,02$ (por ejemplo, $h = 0,005$), el algoritmo es numéricamente estable,
- si $h = 0,02$, el algoritmo es oscilatorio,
- si $h > 0,02$, el algoritmo es numéricamente inestable.

En la tabla 3.1 se presentan los resultados numéricos obtenidos con los distintos métodos para los valores indicados del paso de integración y la solución exacta (analítica) de la ecuación diferencial.

t_k	Euler explícito		Euler implícito		R. trapezoidal	valor real
	$h = 0,005$	$h = 0,02$	$h = 0,02$	$h = 0,01$	$h = 0,01$	
0,000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
0,005	0,500000	-	-	-	-	0,60653
0,010	0,250000	-	-	0,500000	0,333333	0,36787
0,015	0,125000	-	-	-	-	0,22313
0,020	0,062500	-1,0000	0,333333	0,250000	0,111111	0,13533
0,025	0,031250	-	-	-	-	0,08208
0,030	0,015625	-	-	0,125000	0,037037	0,04978
0,035	0,007813	-	-	-	-	0,03019
0,040	0,003906	1,000000	0,111111	0,062500	0,012346	0,01831
0,045	0,001953	-	-	-	-	0,01110
0,050	0,000977	-	-	0,031250	0,004115	0,00673
0,055	0,000488	-	-	-	-	0,00408
0,060	0,000244	-1,0000	0,037037	0,015625	0,001377	0,00247
0,065	0,000122	-	-	-	-	0,00150
0,070	0,000061	-	-	0,007813	0,000457	0,00091
0,075	0,000031	-	-	-	-	0,00055
0,080	0,000015	1,000000	0,012346	0,003906	0,000152	0,00033
0,085	0,000008	-	-	-	-	0,00020
0,090	0,000004	-	-	0,001953	0,000051	0,00012
0,095	0,000002	-	-	-	-	0,00007
0,100	0,000001	-1,0000	0,004115	0,000977	0,000017	0,00004

Tabla 3.1: Comparación de los resultados numéricos obtenidos con los métodos de integración numérica y distintos pasos de integración, y la solución exacta.

3.3. Aplicación de los algoritmos de integración numérica a la resolución de sistemas dinámicos lineales

Hasta aquí se ha analizado la resolución de una única ecuación diferencial. En ocasiones un sistema tiene más de una variable de estado, y en ese caso se tendrá un sistema de tantas ecuaciones diferenciales como variables de estado existan.

Sea un sistema dinámico lineal definido por el sistema de ecuaciones diferenciales planteadas en variables de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.37)$$

siendo \mathbf{x} el vector de variables de estado (o vector de estado), \mathbf{u} el vector de fuentes independientes (excitaciones aplicadas al sistema), y \mathbf{A} , \mathbf{B} matrices de coeficientes constantes. En la ecuación (3.37) y en lo que resta de este tema, se denotarán con letra negrita los vectores y matrices.

3.3.1. Resolución mediante Euler explícito

Al aplicar este método, el algoritmo avanza a través de la expresión

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\mathbf{f}_n, \quad (3.38)$$

pero ahora, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$.

Sustituyendo \mathbf{f}_n por su valor, se obtiene directamente el valor del vector de variables de estado en el instante t_{n+1} , a partir del vector de variables de estado en el instante t_n :

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h(\mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{B}\mathbf{u}_n). \quad (3.39)$$

Agrupando términos, se obtiene la expresión general

$$\mathbf{x}_{n+1} = (\mathbf{I} + h\mathbf{A})\mathbf{x}_n + h\mathbf{B}\mathbf{u}_n, \quad (3.40)$$

siendo \mathbf{I} la matriz identidad del mismo orden que \mathbf{A} y \mathbf{u}_n el vector de fuentes independientes particularizadas en el instante t_n .

3.3.2. Resolución mediante Euler implícito

Al aplicar este método, se debe avanzar el algoritmo recursivamente a través de la expresión:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\mathbf{f}_{n+1}. \quad (3.41)$$

Por tanto,

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h(\mathbf{A}\mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{n+1}) \quad (3.42)$$

$$(\mathbf{I} - h\mathbf{A})\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\mathbf{B}\mathbf{u}_{n+1}. \quad (3.43)$$

Despejando \mathbf{x}_{n+1} ,

$$\mathbf{x}_{n+1} = (\mathbf{I} - h\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{x}_n + h\mathbf{B}\mathbf{u}_{n+1}), \quad (3.44)$$

siendo \mathbf{u}_{n+1} el vector de fuentes independientes particularizadas en el instante t_{n+1} .

3.3.3. Resolución mediante la Regla trapezoidal

En este caso el algoritmo avanza la solución numérica a través de la expresión:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{h}{2}(\mathbf{f}_n + \mathbf{f}_{n+1}). \quad (3.45)$$

Por tanto, al sustituir las expresiones de \mathbf{f}_n y \mathbf{f}_{n+1} ,

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{h}{2}(\mathbf{A}\mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{B}\mathbf{u}_n) \quad (3.46)$$

$$\left(\mathbf{I} - \frac{h}{2}\mathbf{A}\right)\mathbf{x}_{n+1} = \left(\mathbf{I} + \frac{h}{2}\mathbf{A}\right)\mathbf{x}_n + \frac{h}{2}\mathbf{B}(\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n). \quad (3.47)$$

Y despejando de nuevo \mathbf{x}_{n+1} ,

$$\mathbf{x}_{n+1} = \left(\mathbf{I} - \frac{h}{2}\mathbf{A}\right)^{-1} \left[\left(\mathbf{I} + \frac{h}{2}\mathbf{A}\right)\mathbf{x}_n + \frac{h}{2}\mathbf{B}(\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n) \right]. \quad (3.48)$$

4. Aplicación de la Transformada de Laplace a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias

4.1. La transformada de Laplace

La transformada de una función consiste en asociar a la función primitiva una nueva función transformada. A menudo el paso de la función primitiva a la función transformada se realiza a través de una operación matemática.

Los motivos para realizar transformaciones son diversos; fundamentalmente poder visualizar mejor una función, extraer información no visible de forma inmediata o simplificar determinados cálculos matemáticos. Un ejemplo de lo primero es la representación de funciones en escala logarítmica, un ejemplo de lo segundo es la Transformada de Fourier que ayuda a obtener la frecuencia y amplitud de los armónicos presentes en una señal, un ejemplo de lo tercero es la transformada de Laplace, que ayuda a integrar ecuaciones diferenciales de una forma más sencilla.

En ocasiones la transformada de una función conlleva cambiar la variable independiente, como ocurre en la figura 4.1, en la que se pasa del dominio del tiempo t al dominio de una nueva variable s . La nueva variable independiente (en la figura, s) no tiene por qué tener un significado físico.

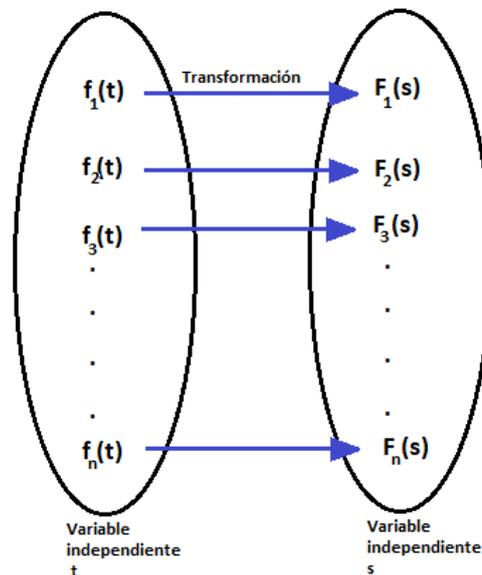


Figura 4.1: Transformación de una función matemática.

La transformada de Laplace, debida al físico y matemático francés Pierre Simon Laplace (figura 4.2), hace corresponder a una función real de variable real $f(t)$, una nueva función

$F(s)$, llamada transformada de Laplace, definida por la expresión

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (4.1)$$

donde s es un número complejo:

$$s = \sigma + j\omega. \quad (4.2)$$

La aplicación de esta transformación simplifica considerablemente la solución matemática de los problemas de transitorios electromagnéticos en circuitos eléctricos. Estos problemas contienen habitualmente un número elevado de ecuaciones diferenciales, dado que un circuito eléctrico puede contener numerosas ramas con bobinas o condensadores.

Mediante la transformada de Laplace, las ecuaciones diferenciales ordinarias quedan transformadas en ecuaciones algebraicas, lo cual permite su solución sistemática.

El procedimiento habitual para resolver un circuito utilizando la transformada de Laplace es el siguiente:

1. Planteamiento de las ecuaciones diferenciales que rigen el sistema.
2. Expresión de dichas ecuaciones como ecuaciones algebraicas aplicando la transformada de Laplace.
3. Obtención de las condiciones de contorno de la variable a integrar
4. Solución del conjunto de ecuaciones algebraicas resultante en el dominio de Laplace.
5. Aplicación de la transformada inversa de Laplace, con el fin de obtener la expresión de la solución en el dominio del tiempo.

La transformada de Laplace es aplicable a cualquier función de orden exponencial. Dicho de una manera intuitiva, puede aplicarse a cualquier función que no crezca más rápido de lo que e^{-st} disminuye. Por ejemplo, podría aplicarse a la función $f(t) = t^2$, pero no a la función $f(t) = e^{t^2}$. En la práctica, siempre es aplicable a las funciones que rigen los circuitos eléctricos.

En el estudio de transitorios eléctricos, suele aplicarse la transformada de Laplace a aquellas funciones que describen la evolución de variables eléctricas de interés, típicamente tensión y corriente.



Figura 4.2: Pierre Simon Laplace.

4.2. Propiedades fundamentales

Para los propósitos de esta asignatura, la propiedad más interesante de la transformada de Laplace es que convierte la derivada de una función en el tiempo en un polinomio en s , lo cual es tanto como decir que se ha convertido una ecuación diferencial ordinaria en una ecuación algebraica. Otra propiedad especialmente útil de la transformada de Laplace, que permite realizar la transformada de funciones complejas como combinación de otras funciones cuya transformada es más sencilla o que se pueden encontrar en tablas, es la linealidad.

Veamos a continuación estas y otras propiedades. Sean $F(s)$, $F_1(s)$, $F_2(s)$ las transformadas de $f(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, respectivamente. Entonces se cumplen las relaciones siguientes:

- Derivada respecto al tiempo:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0^+) \quad (4.3)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0^+) - f'(0^+) \quad (4.4)$$

$$\dots \quad (4.5)$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+) \quad (4.6)$$

donde $f(0^+)$, $f'(0^+)$ y $f^{(n-1)}(0^+)$ son el valor de la función y de sus derivadas sucesivas en el instante $t = 0^+$.

- Linealidad: Si a y b son números cualesquiera,

$$\mathcal{L}[af_1(t) + bf_2(t)] = aF_1(s) + bF_2(s) \quad (4.7)$$

- Desplazamiento en el tiempo:

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-st_0} F(s) \quad (4.8)$$

- Desplazamiento en s :

$$\mathcal{L}[e^{s_0 t} f(t)] = F(s - s_0) \quad (4.9)$$

- Escalado en el tiempo:

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (4.10)$$

- Integración respecto al tiempo:

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^0 f(\tau) d\tau \quad (4.11)$$

- Teorema del valor inicial:

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (4.12)$$

- Teorema del valor final:

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (4.13)$$

La propiedad de desplazamiento en el tiempo permite estudiar diversos transitorios concatenados. El resto de propiedades serán menos utilizadas en esta asignatura.

4.3. Transformadas de las funciones más comunes

En la práctica, las transformadas y transformadas inversas de Laplace de las funciones más habituales suelen obtenerse de tablas. La demostración de cada transformada puede obtenerse aplicando la ecuación (4.1), o bien consultarse en cualquier libro sobre la materia. A modo de ejemplo, la transformada de la función constante $f(t) = K$ se obtiene de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}(K) = \int_0^{\infty} K e^{-st} dt = K \int_0^{\infty} e^{-st} dt = K \left| \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} = \frac{K}{s}. \quad (4.14)$$

En la tabla 4.1 se muestran las transformadas de Laplace de las funciones más comunes.

Función $f(t)$	Transformada $F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
$\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{s(s + \alpha)}$
$t e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$
$\frac{t^{n-1} e^{-\alpha t}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s + \alpha)^n}$
$\frac{1}{\alpha^2}(e^{-\alpha t} + \alpha t - 1)$	$\frac{1}{s^2(s + \alpha)}$
$\frac{1}{\beta - \alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$	$\frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)}$
$\frac{1}{\beta - \alpha}(\beta e^{-\beta t} - \alpha e^{-\alpha t})$	$\frac{s}{(s + \alpha)(s + \beta)}$
$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\text{cos } \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

Tabla 4.1: Transformadas de Laplace de algunas funciones.

4.4. Ejemplo de aplicación

Vamos a resolver ahora la ecuación diferencial del apartado 2.5 utilizando la transformada de Laplace.

Solución:

La ecuación que se desea resolver es la ecuación (2.30), que reproducimos aquí por comodidad

$$38,75 \cdot \frac{dT}{dt} + 0,284 \cdot T = 22,54$$

La ecuación anterior es de la forma

$$a \cdot \frac{dT}{dt} + b \cdot T = c$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación anterior

$$\mathcal{L} \left[a \cdot \frac{dT}{dt} + b \cdot T \right] = \mathcal{L}[c]$$

Como se vio en el apartado 4.2, la transformada de Laplace posee la propiedad de linealidad, de forma que la ecuación anterior queda

$$a \cdot \mathcal{L} \left[\frac{dT}{dt} \right] + b \cdot \mathcal{L}[T] = \mathcal{L}[c]$$

Llamando $T(s)$ a la transformada de Laplace de $T(t)$ y transformando la derivada de T respecto del tiempo de la forma indicada en el apartado 4.2 queda

$$a \cdot [s \cdot T(s) - T(0^+)] + b \cdot T(s) = L[c]$$

Como se indicó anteriormente, la temperatura es una variable de estado, por lo que debe ser una función continua en el tiempo

$$T(0^+) = T(0^-) = 21 \text{ °C}$$

De la tabla de transformadas de Laplace (tabla 4.1) podemos ver que la transformada de una constante es dicha constante dividida entre s , de donde

$$a \cdot s \cdot T(s) - a \cdot T(0^+) + b \cdot T(s) = \frac{c}{s}$$

Despejando $T(s)$ queda

$$T(s) = \frac{c + s \cdot a \cdot T(0^+)}{s \cdot (a \cdot s + b)}$$

Sustituyendo valores

$$T(s) = \frac{22,54 + 38,75 \cdot 21 \cdot s}{s \cdot (38,75 \cdot s + 0,284)} = \frac{22,54 + 813,75 \cdot s}{s \cdot (38,75 \cdot s + 0,284)}$$

El último paso que resta por dar para resolver el problema es obtener la antitransformada de Laplace de $T(s)$. El problema es que mirando en la tabla de antitransformadas, no existe ninguna función cuya transformada sea la función en s obtenida. Por eso hemos de descomponer la función en s obtenida en funciones más simples

$$T(s) = \frac{22,54 + 813,75 \cdot s}{s \cdot (38,75 \cdot s + 0,284)} = \frac{79,4}{s} + \frac{-2261,7}{38,75 \cdot s + 0,284}$$

La antitransformada del primer sumando es inmediata, pero para hallar la antitransformada del segundo sumando dividiremos el numerador y el denominador por 38,75, con lo que queda

$$T(s) = \frac{79,4}{s} + \frac{-58,4}{s + 0,00733}$$

Y acudiendo a la tabla de antitransformadas obtenemos la evolución de la temperatura del conductor en el tiempo

$$T(t) = 79,4 - 58,4 \cdot e^{-0,00733 \cdot t} \quad [^{\circ}\text{C}]$$

Podemos comprobar que esta solución coincide con la obtenida en el apartado 2.5.