uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

CURSO OCW

FUNDAMENTOS DE TRANSITORIOS EN REDES ELÉCTRICAS

Mónica Alonso Martínez
Juan Carlos Burgos Díaz
Mª Ángeles Moreno López de Saá

Tema 4.
Transitorios de segundo orden en circuitos eléctricos.

Índice

1. Introducción.

Un régimen transitorio de segundo orden es aquel que viene determinado por una ecuación diferencial de segundo orden. Como regla general esto ocurre cuando existen dos elementos almacenadores de energía.

El transitorio de segundo orden más sencillo de estudiar es el transitorio de conexión de un circuito compuesto por una resistencia, una bobina y una capacidad en serie (en adelante RLC serie).

En el presente capítulo se estudiará la resolución de este transitorio en el dominio del tiempo y, seguidamente, se estudiará en profundidad utilizando la transformada de Laplace.

Los estudios del capítulo enseñan cómo proceder para analizar un transitorio de segundo orden. Mediante la metodología utilizada se pueden abordar otro tipo de regímenes transitorios.

2. Transitorio de conexión del circuito RLC serie en el dominio del tiempo.

El circuito a estudiar se muestra en la figura 4.1.

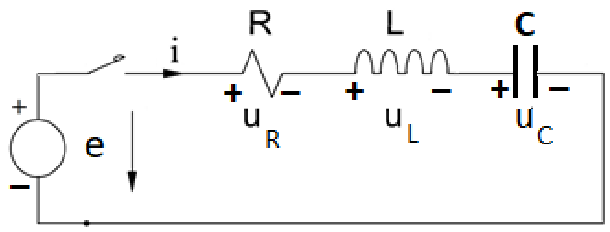

Figura 4.1: Circuito RLC serie alimentado mediante una fuente de tensión.

La forma de resolver el problema es independiente de la forma de onda de la tensión aplicada por la fuente.

2.1. Ecuaciones del circuito.

Las ecuaciones del circuito son

$$e = u_R + u_L + u_C \tag{4.1}$$

$$u_R = R \cdot i \tag{4.2}$$

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} \tag{4.3}$$

$$i = C \cdot \frac{du_C}{dt} \tag{4.4}$$

Las variables de estado del circuito son la corriente en la bobina y la tensión en el condensador, ya que esas variables son las que determinan la energía almacenada en esos dos elementos.

Combinando las ecuaciones (4.1) a (4.4) se llega a una ecuación diferencial de segundo orden con una única incógnita. Dado que para resolver una ecuación diferencial se deben utilizar las condiciones de contorno de las variables de estado, lo más cómodo es que la incógnita que aparece en la ecuación diferencial sea una de las dos variables de estado.

Si, por ejemplo, queremos obtener la intensidad en el circuito, derivaremos la ecuación (4.1) y queda

$$\frac{de}{dt} = \frac{du_R}{dt} + \frac{du_L}{dt} + \frac{du_C}{dt}. \tag{4.5}$$

Y utilizando las ecuaciones (4.2) a (4.4) queda

$$\frac{de}{dt} = R \cdot \frac{di}{dt} + L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C}. \tag{4.6}$$

Si, en lugar de querer obtener la intensidad en el circuito, queremos obtener la tensión en bornas del condensador, habría que sustituir en (4.1) la intensidad en función de la tensión en el condensador utilizando la ecuación (4.4), con lo que se llega a

$$e = R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + L \cdot C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C. \tag{4.7}$$

Las ecuaciones (4.6) y (4.7) son ecuaciones diferenciales de segundo orden. Estas ecuaciones se pueden resolver en el dominio del tiempo o utilizando la transformada de Laplace. Como la resolución de ambas ecuaciones es muy semejante, en lo que sigue se resolverá sólo la ecuación (4.7).

2.2. Resolución en el dominio del tiempo.

Para resolver la ecuación (4.7) en el dominio del tiempo se debe sumar a la solución de la ecuación homogénea la solución particular de la ecuación diferencial.

La solución particular de la ecuación diferencial depende de la forma de onda de la fuente de tensión aplicada. La expresión de la solución particular, i_p, se obtiene analizando el circuito en régimen permanente.

Solución de la ecuación homogénea

La ecuación homogénea es

$$L \cdot C \cdot \frac{d^2 u_{C,h}}{dt^2} + R \cdot C \cdot \frac{du_{C,h}}{dt} + u_{C,h} = 0. \tag{4.8}$$

Como se indicó en el tema 1, la solución de esta ecuación diferencial es de la forma

$$u_{C,h} = k_1 \cdot e^{p_1 t} + k_2 \cdot e^{p_2 t}, \tag{4.9}$$

donde p_1 y p_2 son las raíces del polinomio característico (llamadas *frecuencias naturales*), y k_1 y k_2 constantes de integración que dependen de las condiciones de contorno de las variables de estado (son términos de amplitud).

El polinomio característico de la ecuación diferencial se obtiene sustituyendo el operador derivada por p

$$L \cdot C \cdot p^2 + R \cdot C \cdot p + 1 = 0. \tag{4.10}$$

Las raíces de este polinomio son

$$p = \frac{-R \cdot C \pm \sqrt{R^2 \cdot C^2 - 4 \cdot L \cdot C}}{2 \cdot L \cdot C}. \tag{4.11}$$

Las raíces del polinomio son reales si el término que está debajo de la raíz (discriminante) es positivo o nulo.

- Si el discriminante es positivo ($R^2 \cdot C^2 - 4 \cdot L \cdot C > 0$), las raíces son reales, con lo que la solución a la ecuación homogénea es la suma de dos exponenciales decrecientes. Se dice entonces que el circuito es *sobreamortiguado*.
- Para el caso de que el discriminante sea nulo ($R^2 \cdot C^2 - 4 \cdot L \cdot C = 0$), se dice que el circuito es *críticamente amortiguado*. En ese caso los valores de p_1 y p_2 son idénticos, y la solución a la ecuación homogénea tiene forma de una única función exponencial decreciente.
- En el caso de que el discriminante sea negativo ($R^2 \cdot C^2 - 4 \cdot L \cdot C < 0$), las raíces del polinomio característico serán números complejos conjugados

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_m, \tag{4.12}$$

donde

$$\sigma = \frac{R}{2L} \tag{4.13}$$

$$\omega_m = \frac{\sqrt{R^2 \cdot C^2 - 4 \cdot L \cdot C}}{2 \cdot L \cdot C} \tag{4.14}$$

Con lo que ω_m vale

$$\omega_m = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{4 \cdot L^2}}. \tag{4.15}$$

Se denomina pulsación de resonancia (o frecuencia angular de resonancia) a

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}, \tag{4.16}$$

con lo que

$$\omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2}. \tag{4.17}$$

El término σ se conoce como *factor o coeficiente de amortiguamiento*, pues determina la rapidez con la que se desvanece la señal total, mientras que la frecuencia de resonancia, ω_0, determina la rapidez de oscilación del sistema.

Nótese que $p_{1,2}$ tienen dimensiones de s^{-1}, por lo que representan una frecuencia y, por ello, se les llama *pulsaciones o frecuencias naturales.*

Teniendo en cuenta (4.9) y (4.12) la solución a la ecuación homogénea queda

$$u_{C,h} = k_1 \cdot e^{-\sigma \cdot t} \cdot e^{j\omega_m \cdot t} + k_2 \cdot e^{-\sigma \cdot t} \cdot e^{-j\omega_m \cdot t}, \tag{4.18}$$

esto es

$$u_{C,h} = e^{-\sigma t} \left\{ k_1[\cos(\omega_m t) + j \operatorname{sen}(\omega_m t)] + k_2[\cos(\omega_m t) - j \operatorname{sen}(\omega_m t)] \right\}. \tag{4.19}$$

Y agrupando términos queda

$$u_{C,h} = e^{-\sigma t} \left\{ (k_1 + k_2) \cos(\omega_m t) + j(k_1 - k_2) \operatorname{sen}(\omega_m t) \right\}. \tag{4.20}$$

Los valores de la tensión $u_{C,h}$ deben ser números reales, por lo que k_1 y k_2 deben ser números complejos conjugados

$$k_m = \frac{a}{2} \pm j\frac{b}{2}, \tag{4.21}$$

con lo que

$$u_{C,h} = a \cdot e^{-\sigma t} \cdot \cos(\omega_m t) + b \cdot e^{-\sigma t} \cdot \operatorname{sen}(\omega_m t). \tag{4.22}$$

Por lo tanto, si el discriminante es negativo la respuesta del sistema es una suma de oscilaciones sinusoidales amortiguadas. Se dice que el circuito es *subamortiguado.*

Cualquiera que sea el signo del discriminante, la corriente en el circuito puede obtenerse a partir de la ecuación (4.4)

$$i_h = C\frac{du_{C,h}}{dt}. \tag{4.23}$$

Finalmente han de ser obtenidas las constantes de integración (k_1 y k_2 en el caso de sistemas sobreamortiguados o a y b en el caso de sistemas subamortiguados). Para ello debe expresarse que la intensidad en la bobina y la tensión en el condensador deben ser funciones continuas, por lo que en el instante inicial el valor de dichas magnitudes no puede cambiar

$$i(0^-) = i_p(0^+) + i_h(0^+) \tag{4.24}$$

$$u_C(0^-) = u_{C,p}(0^+) + u_{C,h}(0^+) \tag{4.25}$$

Las ecuaciones (4.24) y (4.25) forman un sistema de ecuaciones de las que es posible obtener k_1 y k_2 (o a y b, en su caso).

2.3. Resolución mediante la transformada de Laplace.

La forma de resolver una ecuación diferencial utilizando la transformada de Laplace se indicó en el tema 1 y se puede resumir en cuatro pasos:

a) Se aplica a las ecuaciones diferenciales la transformada de Laplace, con el fin de convertirlas en ecuaciones algebraicas.

b) Se obtienen las condiciones de contorno de la variable a integrar.

c) Se despeja la transformada de Laplace de la variable cuyo valor se desea conocer (la intensidad o la tensión) para expresarla en función de la variable s.

d) Se aplica la transformada inversa de Laplace, con el fin de obtener la expresión en el dominio del tiempo de la variable que se desea conocer.

Para los transitorios que se estudiarán en esta asignatura, la expresión de la función obtenida es un cociente de polinomios en s. Si en la tabla de antitransformadas de Laplace no aparece la antitransformada de la función obtenida en el paso c), se debe descomponer la función obtenida en fracciones más simples, antes de proceder con el paso d). La forma de proceder para descomponer un cociente de polinomios en fracciones simples se vio en las asignaturas matemáticas de primer curso.

En el apartado siguiente se van a estudiar algunos transitorios de segundo orden que se producen en las redes eléctricas y que tienen especial interés, como son la conexión de baterías de condensadores y la obtención de la tensión que aparece en bornas de un interruptor cuando abre un circuito (llamada *tensión transitoria de restablecimiento*). Para simplificar el estudio analítico se considerará que las redes son ideales, es decir, que no existen pérdidas ($R = 0$). Pero, una vez hallada la expresión de la corriente o la tensión en el tiempo, se realizará un análisis cualitativo incluyendo las pérdidas que existen en todo circuito eléctrico.

3. Estudio de algunos transitorios de segundo orden de interés práctico en sistemas eléctricos.

3.1. Conexión de condensadores en redes inductivas.

Los motores y demás cargas conectadas a una red eléctrica tienen carácter inductivo. Esto hace que exista una potencia, denominada *potencia reactiva*, precisa para crear el campo magnético en dichos equipos. La existencia de la potencia reactiva reduce el rendimiento de las líneas eléctricas y provoca caídas de tensión. Para evitar esos inconvenientes se utilizan bancos de condensadores.

Los condensadores paralelo, conectados entre la línea y neutro o entre línea y tierra, son elementos muy comunes en los sistemas eléctricos. Su función puede ser bien corregir un factor de potencia inductivo o bien mejorar el perfil de tensiones del sistema. En algunas aplicaciones son conectados y desconectados con bastante frecuencia al variar la carga del sistema y producirse fluctuaciones de tensión.

Las maniobras de conexión y desconexión, como se verá a continuación, pueden originar grandes sobrecorrientes y sobretensiones de elevada frecuencia y, por ello, en el diseño de las baterías de condensadores y de la aparamenta de maniobra asociada deben ser consideradas con sumo cuidado.

Dado que, como se ha dicho, la frecuencia del transitorio es habitualmente mucho mayor a la frecuencia de la red, para estudiar dicho transitorio se puede admitir como simplificación que la tensión de la red de alimentación permanece constante durante el transitorio, esto es, se comporta como una red de corriente continua. Por eso, en lo que sigue, se estudiarán dos casos distintos: el primero admitiendo que la tensión de red es constante (alimentación en corriente continua) y el segundo considerando que la tensión de red varía (alimentación en corriente alterna).

3.1.1. Red alimentada en corriente continua

Dado el circuito de la figura 4.2, que representa la conexión de un condensador en una red inductiva alimentada con corriente continua, calculemos la corriente y la tensión en el condensador C, suponiendo que el interruptor se cierra en el instante $t = 0$.

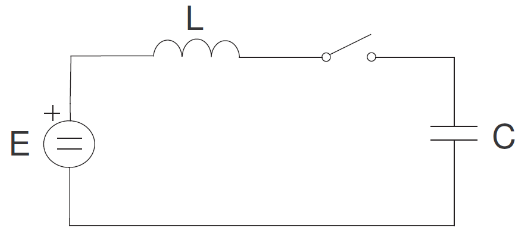

Figura 4.2: Circuito LC alimentado tensión continua.

__Obtención de la corriente__

Planteamiento de las ecuaciones del circuito

La ecuación diferencial que define el funcionamiento del circuito LC de la figura 4.2 es

$$E = L \cdot \frac{di(t)}{dt} + u_C(t), \tag{4.26}$$

y la ecuación de definición del condensador

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}. \tag{4.27}$$

Dado que en este apartado vamos a utilizar en algunas ocasiones variables en el dominio del tiempo y en ocasiones la transformada de dichas variables (esto es, variables en el dominio de s) indicaremos entre paréntesis el dominio de trabajo (t o s). En realidad, esto es redundante, dado que se emplean letras minúsculas para denotar las variables en el dominio del tiempo y letras mayúsculas para denotar la transformada de Laplace de dichas variables.

Para obtener la evolución de la corriente en el circuito se derivará la ecuación (4.26)

$$0 = L \cdot \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{du_C(t)}{dt}. \tag{4.28}$$

Sustituyendo la ecuación (4.27) en (4.28) y reorganizando términos, se tiene

$$0 = \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}i(t). \tag{4.29}$$

Para resolver esta ecuación diferencial utilizaremos la transformada de Laplace.

Resolución de la ecuación diferencial

Paso a: Aplicación de la transformada de Laplace.

Aplicando a la ecuación anterior las propiedades de linealidad y derivación respecto al tiempo, se tiene la ecuación en el dominio de s

$$0 = s^2 \cdot I(s) - s \cdot i(0^+) - i'(0^+) + \frac{1}{L \cdot C} \cdot I(s), \tag{4.30}$$

siendo $I(s)$ la transformada de Laplace de $i(t)$.

Paso b: Obtención de las condiciones de contorno.

Las condiciones de contorno $i(0^+)$ e $i'(0^+)$ se obtienen expresando que la corriente en una bobina y la tensión en un condensador deben ser funciones continuas en el tiempo.

$$i(0^+) = i(0^-) = 0 \tag{4.31}$$

Y de la ecuación (4.26)

$$i'(0^+) = \frac{E - u_C(0)}{L}. \tag{4.32}$$

Paso c: Solución del circuito en el dominio de s.

Agrupando términos en la ecuación (4.30) se tiene

$$\left(s^2 + \frac{1}{LC}\right) I(s) = s \cdot i(0^+) + i'(0^+). \tag{4.33}$$

Sustituyendo (4.31) y (4.32), y despejando $I(s)$, se tiene

$$I(s) = \frac{E - u_C(0)}{L} \cdot \frac{1}{\left(s^2 + \frac{1}{L \cdot C}\right)}, \tag{4.34}$$

que se puede poner como

$$I(s) = \frac{E - u_C(0)}{L} \frac{1}{\left(s^2 + \omega_0^2\right)} \tag{4.35}$$

con $\omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C}$.

Paso d: Obtención de la solución en el dominio del tiempo.

Para obtener la solución en el dominio del tiempo, se realiza la antitransformada de la ecuación (4.35) a partir de la tabla del tema 1.

De esa tabla se deduce que la expresión de la corriente en el circuito en el dominio del tiempo es

$$i(t) = \frac{E - u_C(0)}{L} \frac{1}{\omega_0} \operatorname{sen}(\omega_0 t) = \frac{E - u_C(0)}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \operatorname{sen}(\omega_0 t). \tag{4.36}$$

De esta expresión se observa que la corriente oscila sinusoidalmente a la *frecuencia natural* ω_0, que es función de L y C únicamente. Además, la amplitud de dicha oscilación viene dada por $\frac{E-u_C(0)}{\sqrt{\frac{L}{C}}}$, por lo que el término $\sqrt{\frac{L}{C}}$ debe tener dimensiones de impedancia.

Se llama *impedancia característica* del circuito

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \tag{4.37}$$

y es una característica muy importante de cualquier circuito LC.

La expresión de la corriente que circula por el condensador en función de la impedancia característica del circuito es

$$i(t) = \frac{E - u_C(0)}{Z_0} \operatorname{sen}(\omega_0 t). \tag{4.38}$$

<u>Obtención de la tensión en el condensador</u>

Calculemos ahora la tensión en el condensador, $u_C(t)$. Para obtener la ecuación diferencial se debe eliminar la corriente en las ecuaciones (4.26) y (4.27), lo que se consigue fácilmente sustituyendo (4.27) en (4.26):

$$E = L \cdot C \cdot \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + u_C(t). \tag{4.39}$$

Reorganizando e introduciendo la frecuencia natural de oscilación, ω_0, se tiene

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot u_C(t) = \omega_0^2 \cdot E \tag{4.40}$$

cuya transformada de Laplace es

$$(s^2 + \omega_0^2) \cdot U_C(s) - s \cdot u_C(0) - u_C'(0^+) = \frac{\omega_0^2 \cdot E}{s}. \tag{4.41}$$

Como

$$u_C'(0^+) = \frac{i(0)}{C} = 0, \tag{4.42}$$

se tiene

$$U_C(s) = u_C(0) \cdot \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} + E \cdot \frac{\omega_0^2}{s(s^2 + \omega_0^2)}. \tag{4.43}$$

La antitransformada del primer término figura en la tabla de transformadas del tema 1, pero la del segundo término no. Por eso, se debe descomponer en fracciones más sencillas

$$\frac{\omega_0^2}{s(s^2 + \omega_0^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \tag{4.44}$$

y la ecuación (4.43) puede ponerse como

$$U_C(s) = u_C(0) \cdot \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{E}{s} - E \cdot \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \tag{4.45}$$

cuya antitransformada es

$$u_C(t) = u_C(0) \cdot \cos(\omega_0 t) + E - E \cdot \cos(\omega_0 t), \tag{4.46}$$

esto es

$$u_C(t) = E - [E - u_C(0)] \cos(\omega_0 t), \tag{4.47}$$

resultado que se podía haber obtenido integrando la ecuación (4.27).

En la figura 4.3, se muestra la evolución de la tensión en el condensador para distintos valores de $u_C(0)$. Nótese que cuanto más alejado está el valor inicial de la tensión del condensador, $u_C(0)$, de la tensión de la fuente, E, mayor es la oscilación que se produce en torno a dicho valor.

En un caso real, habría cierta resistencia que amortiguaría paulatinamente la oscilación hasta que el condensador quedara cargado a la tensión de la fuente.

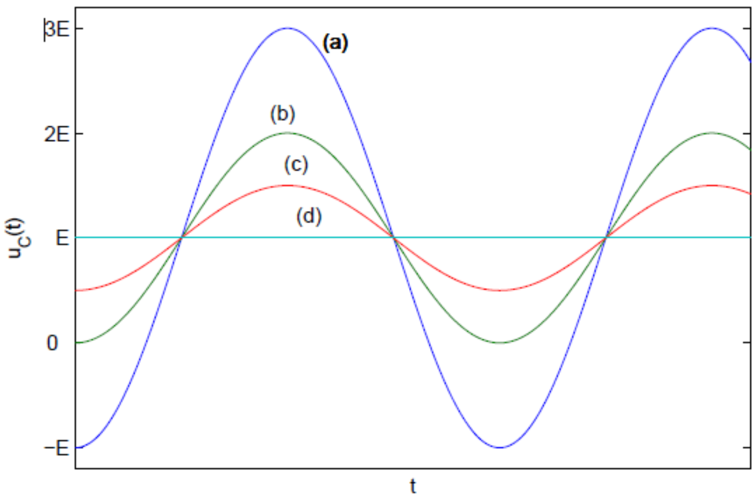

Figura 4.3: Evolución de la tensión en el condensador del circuito LC en continua después de cerrar el interruptor: (a) $u_C(0) = -E$; (b) $u_C(0) = 0$; (c) $u_C(0) = +E/2$; (d) $u_C(0) = +E$.

La interpretación física de lo que está ocurriendo en el circuito de la figura 4.2 se ilustra en la figura 4.4. En este caso se ha supuesto que la tensión inicial en el condensador es inferior a la de la fuente y, por tanto, el condensador empieza a cargarse a través de la bobina. Cuando la tensión en el condensador alcanza el valor de tensión de la fuente, la corriente tiene un valor no nulo y la inductancia impide que la corriente se haga cero de manera instantánea; por ello sigue circulando. Pero a partir de ese instante la tensión del condensador se hace mayor que la tensión de la fuente y la diferencia de tensiones entre el condensador y la fuente hace que la corriente se reduzca y se haga cero un cuarto de ciclo más tarde. En ese instante, como $i = C\frac{du_C}{dt}$, la tensión ha alcanzado un máximo. Sin embargo, la corriente no puede anularse definitivamente en ese instante de tiempo, ya que si así lo hiciera la tensión en bornas de la bobina sería nula, y al ser la tensión del condensador superior a la de la fuente la corriente volvería a establecerse con signo contrario, y el condensador empieza a descargarse.

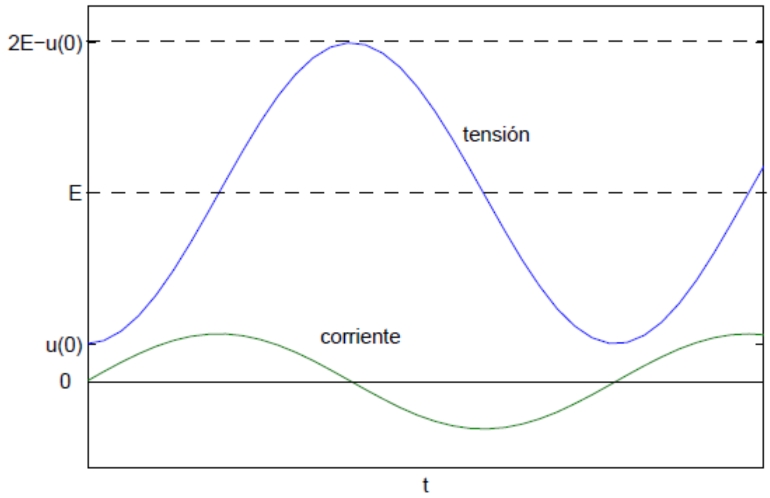

Figura 4.4: Relación entre la tensión y corriente en el condensador en el circuito LC.

3.1.2. Red alimentada en corriente alterna

En el apartado anterior se ha resuelto el problema de la conexión de una batería de condensadores a una red inductiva admitiendo que la red es una red de corriente continua. Esto realmente es una simplificación de la realidad. La consideración de que la fuente es de corriente alterna añade un poco más de dificultad al estudio.

Analicemos ahora el mismo circuito pero esta vez alimentado con una fuente de corriente alterna, como se muestra en la figura 4.5.

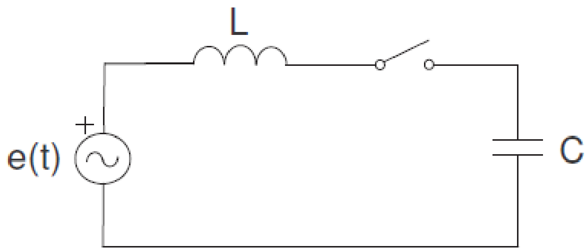

Figura 4.5: Circuito LC alimentado con tensión alterna.

La ecuación diferencial que define el funcionamiento del circuito LC de la figura 4.5 es

$$e(t) = L\frac{di(t)}{dt} + u_C(t) \tag{4.48}$$

.

A la vista de la figura 4.3, el peor transitorio se tiene cuando la tensión de red pasa por un máximo en el momento de la conexión, esto es, $e(t) = E_p \cos(\omega t)$, siendo E_p el valor de pico de la tensión de la fuente.

La ecuación de definición del condensador es

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}. \tag{4.49}$$

Sustituyendo la expresión de $e(t)$ y la ecuación (4.49) en (4.48), se tiene

$$E_p \cos(\omega t) = L \cdot C \cdot \frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + u_C(t), \tag{4.50}$$

que se puede poner como

$$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_C(t) = \frac{E_p}{L \cdot C} \cos(\omega t). \tag{4.51}$$

Introduciendo la frecuencia natural de oscilación del circuito, la ecuación anterior queda de la siguiente forma

$$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot u_C(t) = \omega_0^2 \cdot E_p \cdot \cos(\omega t). \tag{4.52}$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación queda

$$s^2 \cdot U_C(s) - s \cdot u_C(0) - u'_C(0) + \omega_0^2 \cdot U_C(s) = \omega_0^2 \cdot E_p \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \tag{4.53}$$

donde

$$u'_C(0) = \frac{i(0)}{C} = 0. \tag{4.54}$$

Despejando $U_C(s)$ y aplicando la antitransformada de Laplace, se obtiene la expresión de la tensión en el condensador en el dominio del tiempo

$$u_C(t) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} E_p \cdot [\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)] + u_C(0) \cdot \cos(\omega_0 t). \tag{4.55}$$

La figura 4.6 muestra la evolución de la tensión en el condensador, dada por la ecuación (4.55), y la corriente correspondiente (que se obtiene a partir de (4.49)) para el caso de que el condensador esté inicialmente descargado. En dicha figura se aprecia claramente la existencia de dos frecuencias de oscilación, la de la red (ω, más lenta) y la impuesta por el circuito LC (ω_0, bastante más rápida).

En general, en los sistemas eléctricos reales, $\omega_0 \gg \omega$ y la ecuación (4.55) se simplifica a

$$u_C(t) \approx E_p \cdot [\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)] + u_C(0) \cdot \cos(\omega_0 t). \tag{4.56}$$

Si además se limita el estudio a los primeros instantes del transitorio, se puede suponer que la tensión de alimentación no varía, por ser la frecuencia del transitorio mucho mayor que la frecuencia de red, y que se mantiene constante en el valor de pico (pues el peor transitorio,

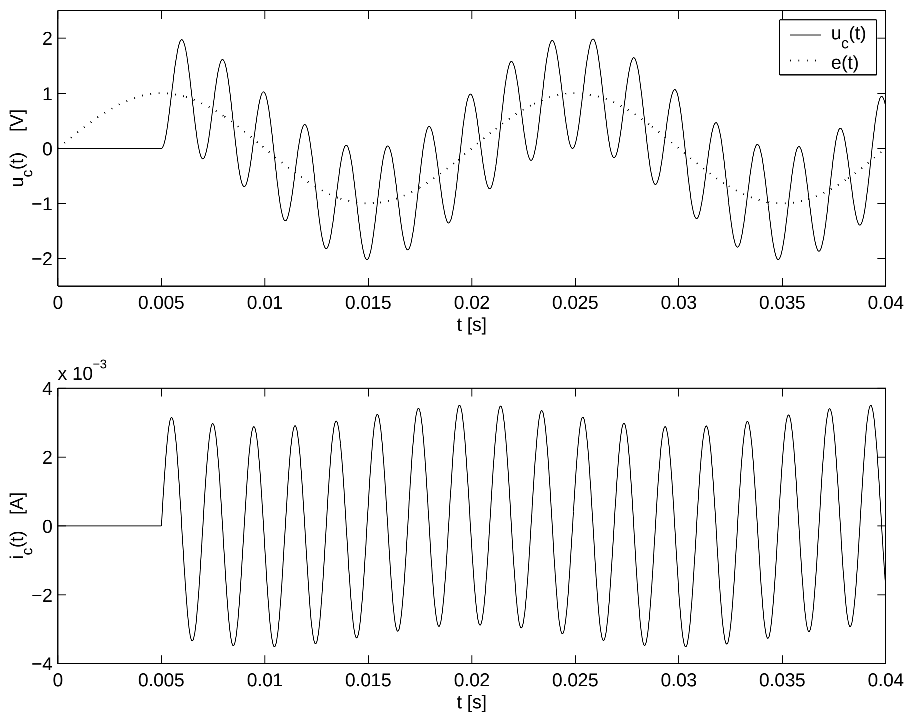

Figura 4.6: Evolución de la tensión y la corriente en el condensador, teniendo en cuenta la frecuencia de la red.

que es el que en general interesa estudiar, es aquel en el que la tensión pasa por un máximo en el momento de producirse el cierre del interruptor), la expresión resultante para la tensión en el condensador, durante los primeros instantes del transitorio, es

$$u_C(t) = E_p - [E_p - u_C(0)] \cdot \cos(\omega_o t). \tag{4.57}$$

A partir de la tensión en el condensador se obtiene fácilmente la expresión de la corriente

$$i_C(t) = C \cdot \omega_0 \cdot [E_p - u_C(0)] \cdot \mathrm{sen}(\omega_0 t). \tag{4.58}$$

Pero,

$$C \cdot \omega_0 = \frac{C}{\sqrt{L \cdot C}} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Z_0}, \tag{4.59}$$

por tanto,

$$i_C(t) \approx \frac{E_p - u_C(0)}{Z_0} \,\mathrm{sen}(\omega_0 t). \tag{4.60}$$

A la vista de la expresión anterior, se observa que la amplitud de las oscilaciones de corriente depende de la diferencia inicial de tensiones entre el valor instantáneo de la fuente de tensión y el valor de la tensión del condensador.

3.2. Tensión transitoria de restablecimiento tras la eliminación de una falta.

El circuito más simple que se puede elegir para ilustrar este fenómeno es el de la figura 4.7. En dicho circuito, la red se considera puramente inductiva, C representa la capacidad parásita de la circuitería adyacente al interruptor (dicha capacidad siempre existe), L representa toda la inductancia hasta el punto de la falta. El interruptor se considera ideal (tensión de arco nula) y se desprecian las pérdidas.

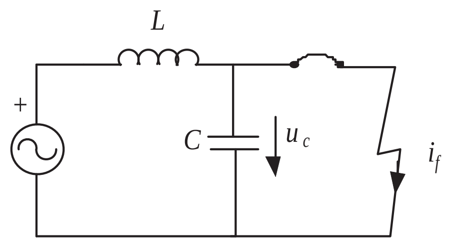

Figura 4.7: Circuito equivalente para el estudio de la tensión transitoria de restablecimiento tras la eliminación de una falta.

Cuando se produce una falta en una red de alta tensión, se establece un camino de baja impedancia entre dos puntos que puentea el circuito aguas debajo de la falta (incluidas las cargas que pudieran estar conectadas en la línea). En esas circunstancias la impedancia se reduce y la corriente aumenta de forma peligrosa. El interruptor debe actuar en el menor tiempo posible, a fin de reducir al mínimo los efectos de esta falta sobre los elementos de la red.

En la selección del interruptor no sólo debe tenerse en cuenta el valor de la corriente que debe cortar, sino también de la tensión que aparece entre los contactos del interruptor una vez abierto, lo que se denomina *tensión transitoria de restablecimiento* (TTR). Para asegurar la interrupción definitiva de la falta es necesario que la TTR sea siempre inferior en todo momento a la rigidez dieléctrica del medio existente entre los contactos una vez abierto el interruptor; si así no fuera en algún instante, el arco volvería a establecerse.

Aunque los interruptores no cortan siempre cuando la corriente de cortocircuito ha alcanzado el régimen permanente, por simplicidad supondremos que la corriente de falta se encuentra en régimen permanente. Si se desprecia la resistencia de la red, la corriente está retrasada 90º respecto a la tensión, es decir, en el momento en que la corriente pasa por cero, la tensión es máxima.

Cuando se da la orden de disparo al interruptor, los contactos del mismo comienzan a separarse. Sin embargo, la separación de contactos del interruptor no interrumpe la corriente porque se produce un arco eléctrico entre dichos contactos a través del cual puede circular la corriente. Afortunadamente, en corriente alterna la corriente pasa por cero 2 veces en un ciclo. Cuando la corriente pasa por cero el arco se enfría, y en uno de esos instantes se produce la interrupción efectiva de la corriente.

Para calcular la TTR, el tiempo se medirá a partir del momento en que se extingue la corriente con el interruptor abierto y, por tanto, la tensión de la fuente se puede expresar por

$e(t) = E_p \cdot \cos(\omega t)$. La ecuación del circuito es

$$L\frac{di}{dt} + u_C = E_p \cos(\omega t), \tag{4.61}$$

pero la relación entre corriente y tensión en el condensador que modela las capacidades parásitas viene dada por

$$i = C\frac{du_C}{dt}, \tag{4.62}$$

pues una vez abierto el interruptor, las capacidades parásitas son el único camino para la circulación de corriente.

La combinación de estas dos ecuaciones da

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{u_C}{LC} = \frac{E_p}{LC}\cos(\omega t). \tag{4.63}$$

Antes de resolver la ecuación, tratemos de interpretar físicamente la situación. Al final del transitorio, la tensión entre los contactos del interruptor será la tensión de alimentación. Sin embargo, en el instante inicial, la tensión en el interruptor es la tensión del arco, que hemos supuesto nula. Como la tensión en la capacidad no puede variar bruscamente, se produce un transitorio durante el cual la capacidad se carga a través de la inductancia L, según el circuito de la figura 4.8.

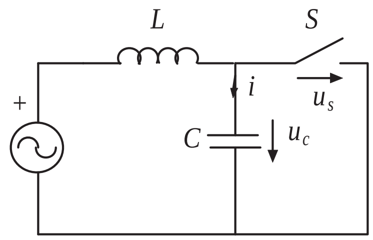

Figura 4.8: Circuito equivalente tras la eliminación de la falta.

De la figura 4.8, se desprende que la tensión en bornas del interruptor una vez despejado el cortocircuito (esto es, la TTR) coincide con la tensión en bornas de las capacidades parásitas de la red.

Resolvemos ya la ecuación diferencial.

Como ya sabemos, se producirá una oscilación a la frecuencia natural del sistema. El análisis será muy similar al de la sección 3.1.2. Tomando $1/LC = \omega_0^2$, la transformada de la ecuación (4.63) es

$$s^2 \cdot U_C(s) - s \cdot u_C(0) - u'_C(0) + \omega_0^2 \cdot U_C(s) = \omega_0^2 \cdot E_p \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \tag{4.64}$$

Las condiciones de contorno del problema son $u_C(0) = 0$ (tensión de arco nula) y $u'_C(0) = \frac{i(0)}{C} = 0$ (toda la corriente de falta inicialmente circula por el cortocircuito, con lo que no circula corriente alguna por las capacidades parásitas en el instante inicial).

Despejando $U_C(s)$ se obtiene

$$U_C(s) = E_p \cdot \omega_0^2 \cdot \frac{s}{(s^2+\omega^2)\cdot(s^2+\omega_0^2)}. \tag{4.65}$$

Descomponiendo el cociente de polinomios en s en fracciones simples queda

$$\frac{s}{(s^2+\omega^2)(s^2+\omega_0^2)} = \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\frac{s}{s^2+\omega^2} - \frac{s}{s^2+\omega_0^2}\right) \tag{4.66}$$

y la ecuación (4.65) puede ponerse como

$$U_C(s) = E_p \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2} \cdot \left(\frac{s}{s^2+\omega^2} - \frac{s}{s^2+\omega_0^2}\right), \tag{4.67}$$

cuya antitransformada es

$$u_C(t) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2} \cdot E_p \cdot \left(\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right). \tag{4.68}$$

Esta ecuación proporciona la tensión que aparece entre los terminales del interruptor cuando se ha eliminado la falta, u_s en la figura 4.8, o tensión transitoria de restablecimiento (TTR). Como normalmente $\omega_0 \gg \omega$, entonces

$$\frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)} \approx 1$$

y, por tanto, la tensión transitoria de restablecimiento se puede escribir de manera aproximada como

$$u_C(t) = E_p \cdot [\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)] \tag{4.69}$$

Además, suele ocurrir que en el periodo de interés (el tiempo para el cual la frecuencia de oscilación natural persiste), hay poco cambio en la tensión de alimentación (en $t \approx 0$ se cumple $\cos(\omega t) \approx 1$) y la expresión anterior se puede simplificar aún más

$$u_C(t) = E_p \cdot [1 - \cos(\omega_0 t)] \tag{4.70}$$

El valor máximo de la tensión transitoria de restablecimiento se produce para $t = \frac{\pi}{\omega_0}$ y es igual a $2E_p$.

El estudio realizado en este apartado es un estudio aproximado:

- En la práctica, las oscilaciones se van amortiguando por las resistencias existentes en el circuito, y la tensión transitoria de restablecimiento sería la que se muestra en la figura 4.9, con lo que el valor máximo de la TTR es inferior a $2E_p$.
- Se ha supuesto que en el instante en el que se extingue la corriente la tensión pasa por un máximo. Este caso es el peor posible por lo que a magnitud de la TTR se refiere, sin embargo, como se vio en las clases de problemas, cuando se produce una falta aparece un transitorio en la corriente de cortocircuito que hace que dicha corriente no sea simétrica durante los primeros ciclos y por lo tanto, la tensión no está pasando por un máximo cuando la corriente se anula. Esto se puede ver en la figura 4.10.

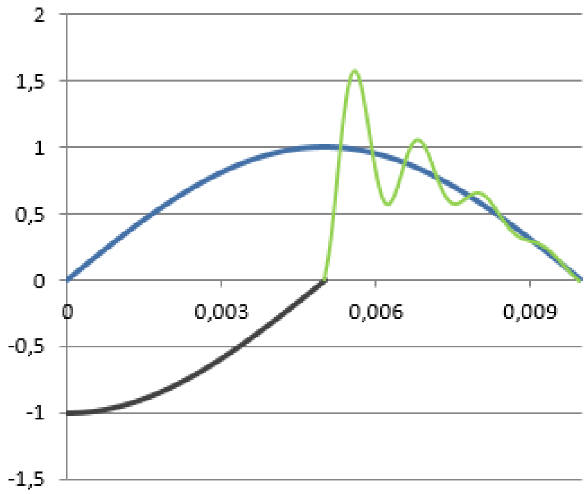

Figura 4.9: Tensión transitoria de restablecimiento tras la eliminación de una falta. Onda azul: Tensión de red. Onda negra: Corriente de falta. Onda verde: TTR.

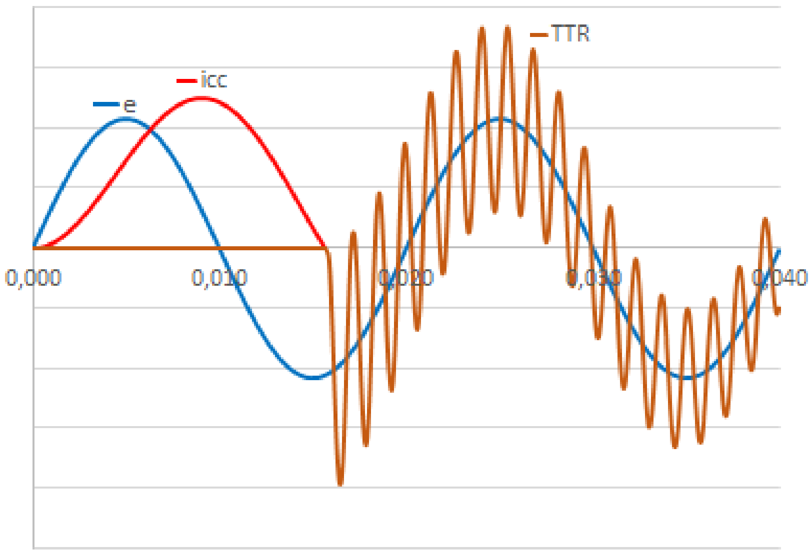

Figura 4.10: Efecto de la resistencia del circuito sobre la tensión transitoria de restablecimiento. Onda azul: Tensión de red. Onda roja: Corriente de falta. Onda marrón: TTR.

3.3. Ejemplo de aplicación.

Una línea monofásica de 76.210 V de tensión nominal tiene una inductancia de 85 mH, una resistencia de 1,8 Ω y una capacidad parásita de 565 nF. En el extremo final de la línea se produce un cortocircuito que se despeja con un interruptor situado en dicho extremo (ver figura 4.11). Se pide obtener la tensión transitoria de restablecimiento en el interruptor posterior a la eliminación del cortocircuito. Se admite que el arco en el interruptor se extingue en el paso por cero de la corriente en el mismo.

Solución

El esquema del circuito a estudiar se muestra en la figura 4.11.

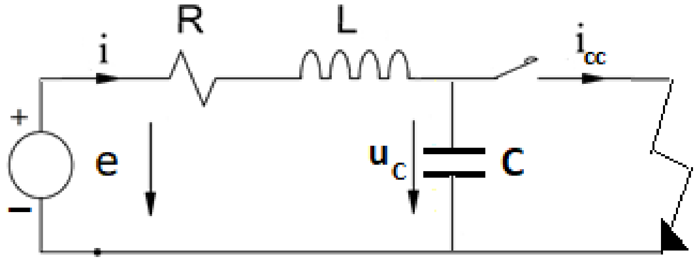

Figura 4.11: Circuito del ejemplo de aplicación.

Lo que se pide en el problema es la tensión en bornes del interruptor una ver que ha abierto, que coincide con la tensión en el condensador que representa las capacidades parásitas, dado que se encuentran en paralelo.

La ecuación que proporciona la tensión en el condensador es la ecuación (4.7), que se reproduce aquí por comodidad

$$e = LC \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C. \tag{4.71}$$

Esta es una ecuación diferencial lineal que resolveremos en el dominio del tiempo.

Solución de la ecuación homogénea

La solución de la ecuación homogénea se obtiene resolviendo el polinomio característico de la ecuación diferencial

$$LC \cdot p^2 + RC \cdot p + 1 = 0 \tag{4.72}$$

Las raíces de este polinomio son

$$p = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC} \tag{4.73}$$

Sustituyendo valores

$$p = \frac{-1{,}02 \cdot 10^{-6} \pm \sqrt{-1{,}92 \cdot 10^{-7}}}{9{,}61 \cdot 10^{-8}} = -10{,}59 \pm j4563 \tag{4.74}$$

Dado que el discriminante es negativo, las raíces del polinomio son números complejos conjugados y la solución de la ecuación homogénea será de la forma (véase ecuación (4.22):

$$u_{C,h} = a \cdot e^{-\sigma t} \cdot \cos(\omega_m t) + b \cdot e^{-\sigma t} \cdot \operatorname{sen}(\omega_m t), \tag{4.75}$$

donde

$$\sigma = 10{,}59 \text{ s}^{-1} \tag{4.76}$$

$$\omega_m = 4563 \text{ rad/s} \tag{4.77}$$

y a y b son constantes de integración que deben ser obtenidas a partir de las condiciones de contorno.

Según la ecuación (4.4), la intensidad se obtendrá derivando la tensión y multiplicando por la capacidad

$$i_h = C \cdot e^{-\sigma t} \left[-\sigma a \cos(\omega_m t) - \sigma b \operatorname{sen}(\omega_m t) - a\omega_m \operatorname{sen}(\omega_m t) + b\omega_m cos(\omega_m t) \right]. \tag{4.78}$$

Solución particular

Para obtener la solución particular, primero hay que obtener la expresión matemática de la tensión aplicada.

Obtención de la expresión matemática de la tensión aplicada

Antes de abrirse el interruptor el circuito era el mostrado en la figura 4.12.

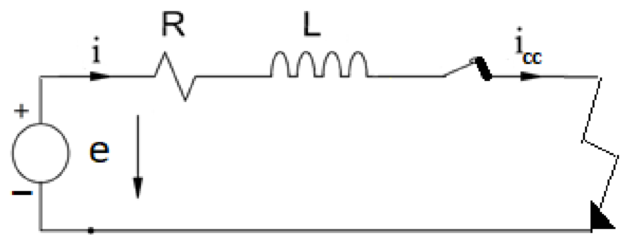

Figura 4.12: Circuito previo a la extinción del arco.

Nos dicen que la corriente se extingue en un paso por cero de la corriente en ese circuito, con lo que tomaremos como expresión de la corriente

$$i_{antes}(t) = \sqrt{2} \cdot I_{antes} \cdot \operatorname{sen}(\omega t) \tag{4.79}$$

En el circuito de la figura 4.12 el ángulo de desfase entre la tensión de la fuente y la intensidad es

$$\varphi_{antes} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L}{R} = \operatorname{arc\,tg} \frac{26{,}7}{1{,}8} = 86{,}14^\circ = 1{,}503 \text{ rad} \tag{4.80}$$

Lo cual significa que la expresión matemática de la tensión aplicada es

$$e(t) = \sqrt{2} \cdot 76210 \cdot \mathrm{sen}(\omega t + 1{,}503) \tag{4.81}$$

Obtención de $U_{C,p}$

Para obtener la tensión en la capacidad del circuito de la figura 4.11, primeramente hemos de obtener la expresión de la intensidad I_p.

El circuito de la figura 4.11 es un circuito serie RLC, que ha sido estudiado en la asignatura Fundamentos de Ingeniería Eléctrica. Para resolver ese circuito hay que obtener la impedancia, el factor de potencia y el origen de fases.

La impedancia del circuito es

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \tag{4.82}$$

donde ω es la pulsación de la fuente $\omega = 2\pi 50$ rad/s.

Sustituyendo valores

$$Z = \sqrt{1{,}8^2 + \left(100\pi \cdot 8{,}5 \cdot 10^{-2} - \frac{1}{100\pi \cdot 5{,}65 \cdot 10^{-7}}\right)^2} = 5607\,\Omega \tag{4.83}$$

$$\varphi_{despues} = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{-5607}{1{,}8} = -89{,}98^\circ = -1{,}57 \text{ rad} \tag{4.84}$$

El valor eficaz de la intensidad es

$$I_p = \frac{E}{Z} = \frac{76210}{5607} = 13{,}59\,A \tag{4.85}$$

La expresión temporal de la intensidad i_p es

$$i_p = 13{,}59 \cdot \sqrt{2} \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t + 86{,}14^{\mathrm{o}} + 89{,}98^{\mathrm{o}}) \tag{4.86}$$

$$= 13{,}59 \cdot \sqrt{2} \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t + 176{,}12^{\mathrm{o}}) \tag{4.87}$$

El valor eficaz de la tensión en las capacidades parásitas es

$$U_{C,p} = I_p \cdot X_C = 13{,}59 \cdot 5634 = 76573\,V \tag{4.88}$$

Y la expresión de la tensión en las capacidades parásitas en el dominio del tiempo

$$u_{C,p} = \sqrt{2} \cdot 76573 \cdot \mathrm{sen}(\omega t + 176{,}12^{\mathrm{o}} - 90^{\mathrm{o}}) \tag{4.89}$$

$$= \sqrt{2} \cdot 76573 \cdot \mathrm{sen}(\omega t + 86{,}12^{\mathrm{o}}) \tag{4.90}$$

ya que, como es sabido, en régimen permanente sinusoidal, la tensión en un condensador está 90° retrasada respecto de la corriente en el condensador.

Obtención de las constantes de integración

Las constantes de integración a y b se obtienen expresando que la tensión en la capacidad y la corriente en la inductancia deben ser funciones continuas en el tiempo.

La tensión en la capacidad parásita es

$$u_C = u_{C,h} + u_{C,p}, \tag{4.91}$$

donde $u_{C,h}$ viene dada por (4.75) y $u_{C,p}$ viene dada por (4.90).

En el instante inicial u_C debe ser nula, dado que hasta la extinción de la corriente de cortocircuito circulaba corriente por el interruptor y el condensador estaba cortocircuitado. Haciendo $t = 0$ en las ecuaciones (4.75) y (4.90), la ecuación (4.91) queda

$$a + \sqrt{2} \cdot 76573 \cdot \mathrm{sen}(86{,}12^{\mathrm{o}}) = 0, \tag{4.92}$$

con lo que

$$a = -\sqrt{2} \cdot 76573 \cdot 0{,}9977 = -108043 \tag{4.93}$$

La intensidad en la inductancia se obtiene sumando las ecuaciones (4.78) y (4.87)

$$i = i_h + i_p \tag{4.94}$$

Y dado que el arco se extingue en el paso por cero de la corriente, la intensidad al comienzo del transitorio en estudio debe ser nula, pues en la inductancia la corriente no puede ser discontinua. Haciendo $t = 0$ en las ecuaciones (4.78) y (4.87), la ecuación (4.94) queda

$$C \cdot [-\sigma \cdot a + b \cdot \omega_m] + 13{,}59 \cdot \sqrt{2} \cdot \mathrm{sen}(176{,}12^{\mathrm{o}}) = 0, \tag{4.95}$$

con lo que

$$b = \frac{1}{\omega_m} \cdot \left[-10{,}59 \cdot (-108{,}04) - \frac{13{,}59 \cdot \sqrt{2} \cdot \mathrm{sen}(176{,}12^{\mathrm{o}})}{565 \cdot 10^{-9}} \right] = -253{,}1 \tag{4.96}$$

Por tanto, la tensión transitoria de restablecimiento pedida es

$$\begin{aligned} TTR = e^{-10{,}59 \cdot t} \cdot [-108043 \cdot \cos(4563 \cdot t) - 253{,}1 \cdot \mathrm{sen}(4563 \cdot t)] + \dots \\ \dots + \sqrt{2} \cdot 76573 \cdot \mathrm{sen}(100\pi t + 86{,}12^{\mathrm{o}}). \end{aligned} \tag{4.97}$$

En la figura 4.13 se muestra la evolución en el tiempo de la tensión de la fuente (curva azul), la intensidad de cortocircuito (curva roja) y la tensión transitoria de restablecimiento (curva verde).

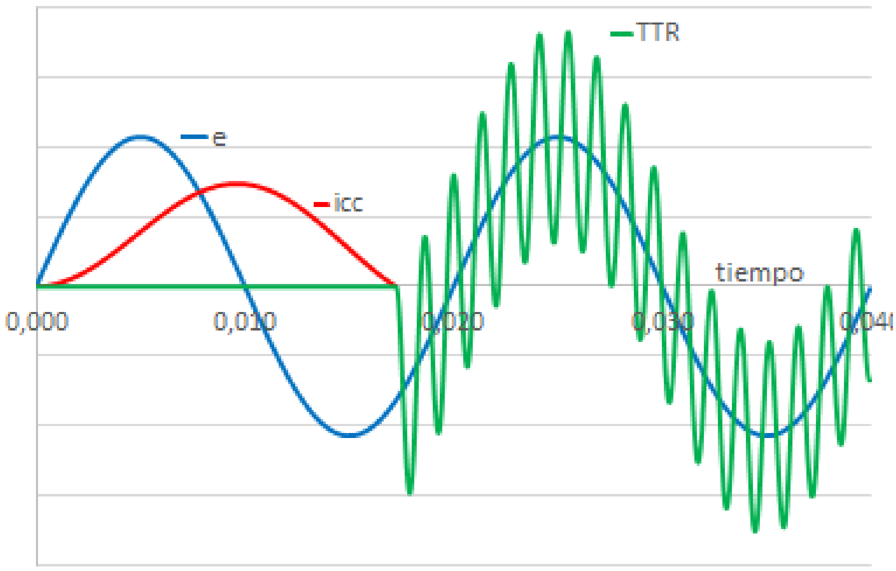

Figura 4.13: Transitorio de cortocircuito (izquierda) y despeje de la falta (derecha). Onda azul: tensión de la funete. Onda roja: intensidad de cortocircuito. Onda verde TTR.